Erdmessung III - Vortrag
Die Gezeiten

Jens Kersten - 211111
Friedrich Dunkhase - 216046

17. Mai 2006

Unter den Gezeiten wird die periodische Bewegung des Wassers, der festen Erde und der Atmosphäre aufgrund der Einwirkung der Gravitation von Körpern im Weltall und der Rotation der Erde verstanden. Für den Beobachter auf der Erde machen sich die Gezeiten durch einen vertikalen Anstieg bzw. Abfall des Wasserstandes bemerkbar. Der unterschiedlichen Beweglichkeit der drei genannten Medien (Luft, Wasser und Erde) ist zuzuschreiben, dass die Gezeiten des Meeres, verglichen mit den anderen beiden Phänomenen, deutlich in den Vordergrund treten.

1 Die Gezeitenkraft

Die Gravitation in einem System, bestehend aus zwei Punktmassen (z.B. Erde und Mond) konnten erstmals mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz (17. Jhd.) erklärt werden:

$$F = G \cdot \frac{M_E \cdot M_M}{r^2}, \tag{1}$$

mit $G = 6,673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ (Gravitationskonstante), M = Masse von Erde bzw. Mond und r = Abstand Erde-Mond.

Aufgrund der Abhängigkeit der Gravitationskraft von der Masse und des reziproken quadratischen Abstandes dieser Punktmassen, haben Sonne und Mond den weitaus größten Anteil an der Gezeiten erzeugenden Kraft. Grundsätzlich kann man die Berechnung der Gezeitenbeschleunigung in einem Punkt getrennt für einzelne Zweikörpersysteme durchführen und die Ergebnisse anschließend addieren.

Zunächst ist klarzustellen, dass die aus der Rotation der Erde resultierenden Fliehkräfte keinen Einfluss auf die Gezeiten haben, da diese radial nach außen gerichtet sind und auf jedem Breitenkreis einen konstanten Betrag haben. Deshalb kann die Erde zur Verdeutlichung der wirkenden Kräfte auch als nicht rotierend betrachtet werden.

Das Massenzentrum eines Systems aus zwei Körpern (z.B. Erde und Mond) wird Gleichgewichtspunkt genannt. Im Allgemeinen wird von einer Rotation des Mondes um die Erde gesprochen, jedoch handelt es sich vielmehr um eine elliptische Rotation der Erde und des Mondes um den gemeinsamen Schwerpunkt. Dieser Schwerpunkt wiederum liegt innerhalb der Erde und beschreibt eine elliptische Bahn um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond-Sonne.

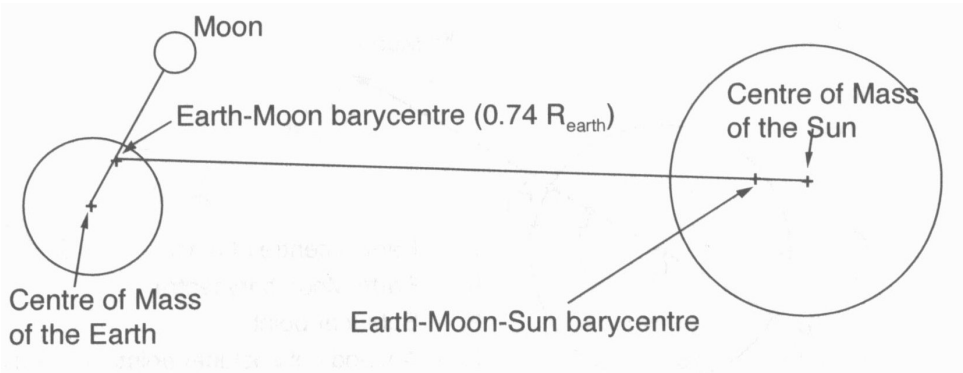

Abbildung 1: Erde- Mond- und Erde- Mond- Sonnenschwerpunkte

Aufgrund der großen Entfernung zwischen Erde und Sonne hat der Mond trotz seiner, verglichen mit der Sonne, geringen Masse einen etwa doppelt so großen Einfluss auf die Gezeitenkräfte.

Durch die Bewegung um den Gleichgewichtspunkt erfahren Erde und Mond eine Zentrifugalbeschleinigung in entgegen gesetzter Richtung des jeweils anderen Körpers. Diese ist in jedem Punkt der Erde gleich. Im Massenzentrum der Erde (und nur dort) hebt sich die vom Mond ausgehende Gravitationskraft und die Zentrifugalkraft auf. Dieses Gleichgewicht ist Voraussetzung für eine Bahnbewegung. In allen anderen Punkten der Erde tritt dagegen eine Gezeitenbeschleunigung auf, welche als Differenz der ortsabhängigen Gravitation $\vec{b}$ und der konstanten Beschleunigung $\vec{b}_0$ (Zentripetalbeschleunigung) definiert ist.

$$\vec{b}_t = \vec{b} - \vec{b}_0 \tag{2}$$

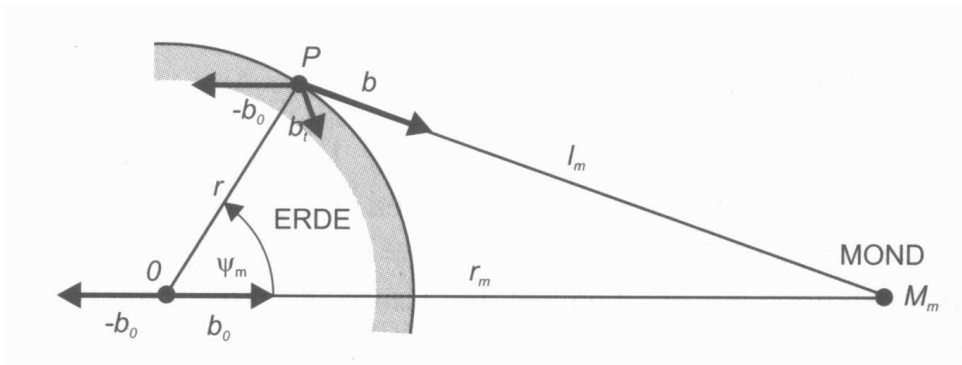

Abbildung 2: Gezeitenbeschleunigung im Punkt P auf der Erdoberfläche

Daraus ergibt sich ein Kraftfeld folgender Beschaffenheit:

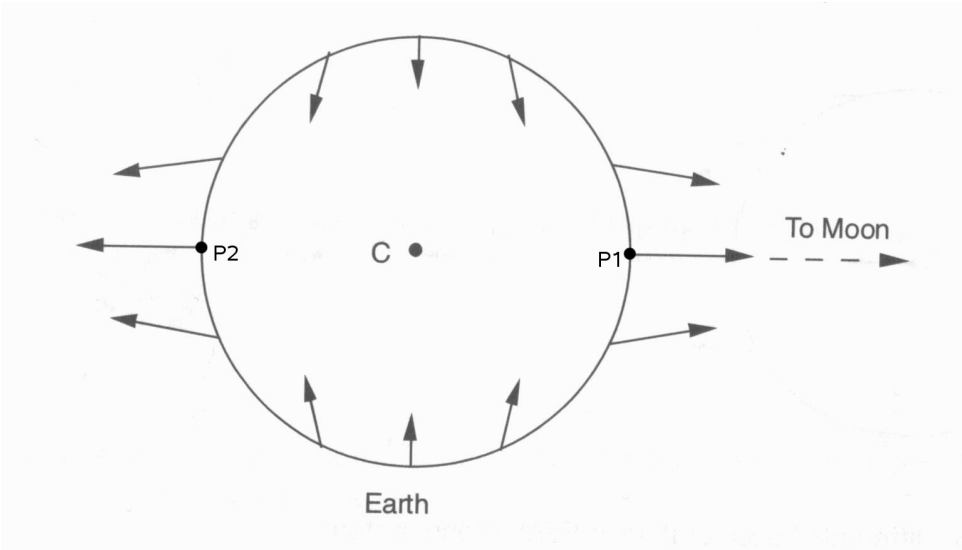

Abbildung 3: Gezeitenbeschleunigungen auf der Erdoberfläche

Auf der zum Mond gerichteten Seite (in Punkt P1) der Erde ist die Gravitation des Mondes größer, als die erfahrene Fliehkraft. Im dazu entgegen gesetzten Punkt P2 ist die Anziehungskraft kleiner als im eben betrachteten Punkt und auch kleiner als die Fliehkraft. Deshalb ist die resultierende Kraft ebenfalls nach außen gerichtet.

Für alle anderen Punkte ergeben sich weniger anschauliche Vektoren. Bezüglich der Erdoberfläche können die Gezeitenkräfte in eine horizontale und vertikale Komponente zerlegt werden. Die Vertikalkomponente wirkt auf das Schwerefeld der Erde, was sich durch eine Veränderung des Gewichts von Massen von bis zu $10^{-7}g$ bemerkbar macht. Die Bewegung z.B. des Wassers wird jedoch von der horizontalen Komponente der Gezeitenkraft bewirkt. Mit dem Übergang von der Gezeitenbeschleunigung zum Gezeitenpotential kann die Gezeiten bedingte Hebung einer Niveaufläche (abhängig von den Ephemeriden des betrachteten Planeten) berechnet werden.

2 Das Gezeitenpotential

Die vom Mond bewirkte Gravitationsbeschleunigung (oder auch Gravitation) $\vec{b}$ auf der Erde ergibt sich, indem die Erde als Einheitsmasse angenommen wird:

$$\vec{b} = -G \cdot \frac{M_m}{l_m^2} \cdot \frac{\vec{l}}{l_m}, \tag{3}$$

wobei der Index m den Bezug zum Mond darstellt. Zwischen Gezeitenbeschleunigung und Gezeitenpotential besteht folgender Zusammenhang:

$$\vec{b}_t = gradV_t = grad(V - V_0). \tag{4}$$

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten r_m und ψ_m erhält man für das Potential einer Punktmasse:

$$V = \frac{GM_m}{l_m}, mit \quad l_m = \sqrt{r^2 + r_m^2 - 2rr_m cos\psi_m}. \tag{5}$$

Das Potential des homogenen $\vec{b}_0$- Feldes ergibt sich durch Multiplikation von mit $rcos\psi_m$:

$$V_0 = \frac{GM_m}{r_m^2} rcos\psi_m. \tag{6}$$

Unter Hinzufügen einer Integrationskonstanten mit der Bedingung $V_t = 0$ für $r = 0$ und $l_m = r_m$ erhält man aus (4), (5) und (6) das Gezeitenpotential:

$$V_t = GM_m \left(\frac{1}{l_m} - \frac{1}{r_m} - \frac{rcos\psi_m}{r_m^2} \right). \tag{7}$$

Das Gezeitenpotential kann entweder aus den Ephemeriden der Himmelskörper oder aus einer Kugelfunktionsentwicklung berechnet werden. Der Ansatz der Reihenentwicklung ist von Vorteil, da diese in der Nähe der Erdoberfläche wegen der Relation $r/r_m = 1/60$ für den Mond schnell konvergiert. Die Ergebnisse aus den Ephemeriden werden zur Kontrolle der Gezeitenpotential-Kataloge verwendet. Aus dem Ansatz einer Reihenentwicklung ergibt sich der Hauptterm der Gezeitenpotential-Entwicklung:

$$V_t = \frac{3}{4} GM_m \frac{r^2}{r_m^3} \left(cos2\psi_m + \frac{1}{3} \right). \tag{8}$$

Die Differentiation von (8) liefert die Gezeitenbeschleunigung (in radialer und tangentialer Richtung). Bei $\psi = 0°$ und $\psi = 180°$ beträgt die radiale Komponente 0,36 m für den Mond und 0,16 m für die Sonne. Bei $\psi = 90°$ und $\psi = 270°$ erhält man eine Senkung von 0,18 m (Mond) bzw. 0,08 m (Sonne). In stationären (sich Zeitlich nicht ändernden) Systemen würden sich die Niveauflächen dementsprechend deformieren, und eine frei bewegliche die ganze Erde bedeckende Wassermasse würde die Form dieser Niveauflächen annehmen (Gleichgewichtsflut).

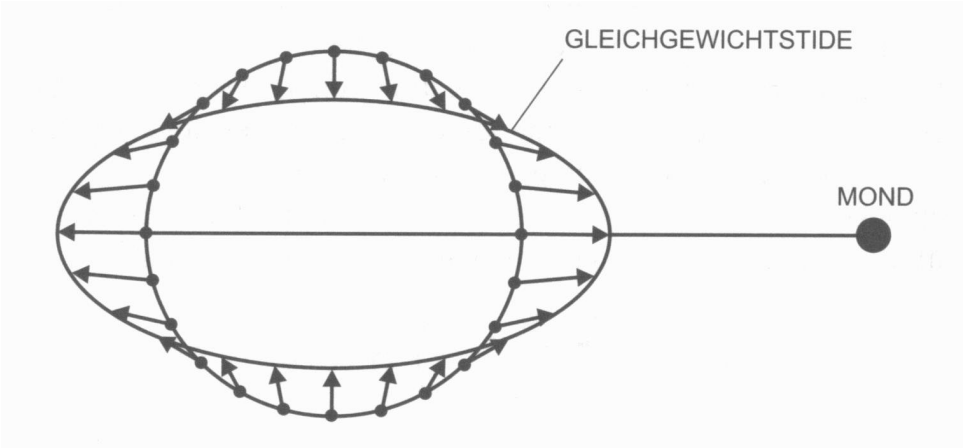

Abbildung 4: Gezeitenbeschleunigung und Gleichgewichtsflut

Durch die Rotation der Erde bewegt sich die Erde sozusagen unter dem System der Gezeiten erzeugenden Kräfte hindurch, wodurch sich für den Betrachter in einem Punkt eine Periodizität ergibt. Der Abstand zwischen zwei Tidehochwässern beträgt jedoch nicht 12, sondern etwa 12 Stunden und 25 Minuten, da sich der Mond auf seiner Bahn um die Erde weiter bewegt. Aufgrund der Küstenmorphologie, der Neigung der Erdachse und der elliptischen Bahn des Mondes um die Erde treten zusätzlich Variationen in den Abständen aufeinander folgender Hoch- und Tiefwasserstände auf.
Zeitliche Veränderungen des Potentialfeldes lassen sich jedoch besser erkennen, wenn der Aufpunkt des jeweiligen Himmelskörpers im erdfesten Koordinatensyste ($\bar{\varphi}$,h) und der Himmelskörper selbst im Äquatorialsystem der Astronomie (δ, h). Damit ändert sich der Ausdruck für V_t zu:

$$V_t = \frac{3}{4} G M_m \frac{r^2}{r_m^3} \left(\left(\frac{1}{3} - sin^2\varphi \right) \left(1 - 3sin^2\delta_m\right) \right.$$
$$\left. + sin2\bar{\varphi} sin2\delta_m cosh_m + cos^2\bar{\varphi} cos^2\delta_m cos2h_m \right). \quad (9)$$

In dieser Gleichung treten die zeitlich mit verschiedenen Perioden variierenden Größen r_m, δ_m und h_m auf. r_m ist unabhängig von er Erdrotation, verändert sich nur langperiodisch (Mond: 14 Tage, Sonne: 1/2 Jahr) und enthält einen nichtperiodischen, nur von der Breite abhängigen Anteil, welcher eine permanente Deformation der Niveauflächen bewirkt (Größenordnung: -0,19m an den Polen und 0,10m am Äquator). Die tägliche Rotation der Erde führt in δ_m zu täglichen und in h_m zu halbtäglichen Perioden.

Die Gezeitenanteile in Formel (9) variieren in komplizierter Weise. Die Ephemeriden von Mond und Sonne können jedoch als harmonische Funktionen von fünf astronomischen Fundamentalgrößen ausgedrückt werden, welche sich im wesentlichen gleichmäßig mit der Zeit ändern. Werden diese Reihen in (9) eingeführt, so ergibt sich eine *Spektralanalyse* des Gezeitenpotentials. Eine spektrale Darstellung der Gezeitenbeschleunigung erhält man wiederum aus den partiellen Ableitungen. Damit existiert eine Darstellung des Potentials und der Beschleunigung mit einer Summe zeitabhängiger Cosinus-Funktionen, welche konstante Perioden und von Breite und Höhe abhängige Amplituden und Phasen aufweisen. Diese konstanten Perioden werden *Partialtiden* genannt.

Symbol	Name $l =$ lunar, $s =$ solar	Periode (Sonnen-Zeit)	Amplitude (nms^{-2})
langperiodische Wellen			
M0	konst. l-Tide	∞	102,9
S0	konst. s-Tide	∞	47,7
Ssa	Deklin. Tide zu S0	182,62 d	14,8
Mm	ellipt. Tide zu M0	27,55 d	16,8
Mf	Deklin. Tide zu M0	13,66 d	31,9
tägliche Wellen			
O1	Haupt-l-Tide	25,82 h	310,6
P1	Haupt-s-Tide	24,07 h	144,6
Q1	ellipt. Tide zu O1	26,87 h	59,5
K1	Haupt-ls-Deklin.Tide	23.93 h	436,9
Halbtägliche Wellen			
M2	Haupt-l-Tide	12,42 h	375,6
S2	Haupt-s-Tide	12,00 h	174,8
N2	ellipt. Tide zu M2	12,66 h	71,9
K2	Deklin. Tide zu M2, S2	11,97 h	47,5
Dritteltägliche Wellen			
M3	l-Tide	8,28 h	5,2

Abbildung 5: Die wichtigsten Partialtiden für $\bar{\varphi} = 45°$

3 Die Gezeiten der festen Erde

Die feste Erde reagiert auf die Gezeitenkräfte wie ein elastischer Körper in Form von Erdgezeiten. Die Reaktion einer kugelsymmetrischen, nicht rotierenden, ozeanfreien Erde auf die Gezeiten kann durch die dimensionlosen Love-Zahlen h, k, l beschrieben werden. Sie wirken als Verkleinerungsfaktor auf die einzelnen Therme der Kugelfunktionsentwicklung des Gezeitenpotentials V_t. Für die vertikale Verformung der Erdoberfläche gilt z.B.:

$$\Delta r_{el} = h \cdot \Delta r_t, \text{ mit der Niveauflächenverschiebung } \Delta r_t = \frac{V_t}{g}.$$

Die Massenverschiebung ruft ein zusätzliches Deformationspotential hervor, welches dem Gezeitenpetential proportional ist:

$$V_d = k \cdot V_t. \tag{10}$$

Die Love-Zahlen hängen von der Dichte und den elastischen Eigenschaften des Erdkörpers ab, wobei sie beim kugelsymmetrischen Modell Funktionen des radialen Abstandes zum Erdmittelpunkt darstellen. Das Gravitationspotential auf der Erdoberfläche erfährt unter dem Einfluss der Gezeiten eine Änderung, die sich aus drei Anteilen zusammensetzt:

$$V_{el} = V_t + V_d - g \cdot \Delta r_{el} = V_t \left(1 + k - h\right), \tag{11}$$

mit V_t..Potential der direkten Anziehung, V_t..Deformationspotential und der aus der Vertikalverschiebung der Oberfläche resultierenden Änderung $g \cdot \Delta r_{el}$. Die Ableitungen nach r undergeben wiederum die vertikale und horizontale Komponente

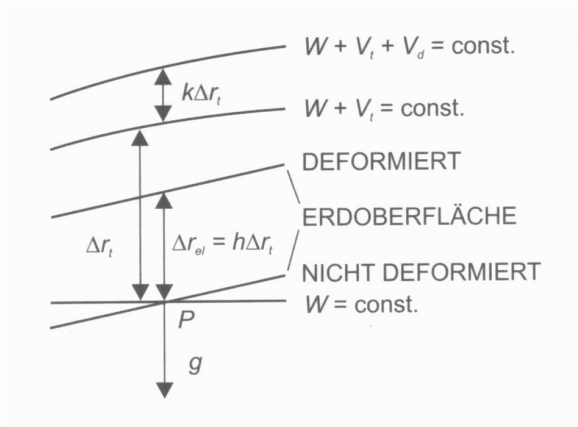

Abbildung 6: gezeitenbedingte vertikale Verschiebung der Niveaufläche und der Erdoberfläche

der Gezeitenbeschleunigung der elastischen Erde. Anhand der Formeln ergibt sich, dass auf der elastischen Erde eine größere Schwereänderung als auf einer starren Erde beobachtet werden kann, was auf die vertikale Verschiebung des Beobachters zurückzuführen ist. Die Rotation und die Abplattung der Erde verursachen eine leichte Breitenabhängigkeit der Gezeitenparameter.
Mit Hilfe der Love-Zahlen und des Gezeitenpotentials ist es möglich, den Einfluss der Gezeiten auf die elastische Erde zu modellieren. Schwieriger stellt sich jedoch die Problematik der Ozeangezeiten dar. Hier sind die auftretenden Phänomene zusätzlich abhängig von vielen zusätzlichen Parametern z.B. der Beschaffenheit des Meeresbodens.

4 Gezeitenmodelle

4.1 Geschichte und Überblick über heutige Modelle

Noch bis vor 400 Jahren hatte man für das Phänomen der Gezeiten keine passende Erklärung gefunden. Erst mit der Gravitationstheorie von Isaac Newton (1642 – 1727) gelang es einen Zusammenhang zwischen den Gezeiten und dem Mond bzw. der Sonne zu finden. Er stellte ein einfaches Tidenmodell auf und konnte damit endlich das Zustandekommen der halbtägigen Perioden der Gezeiten erklären:

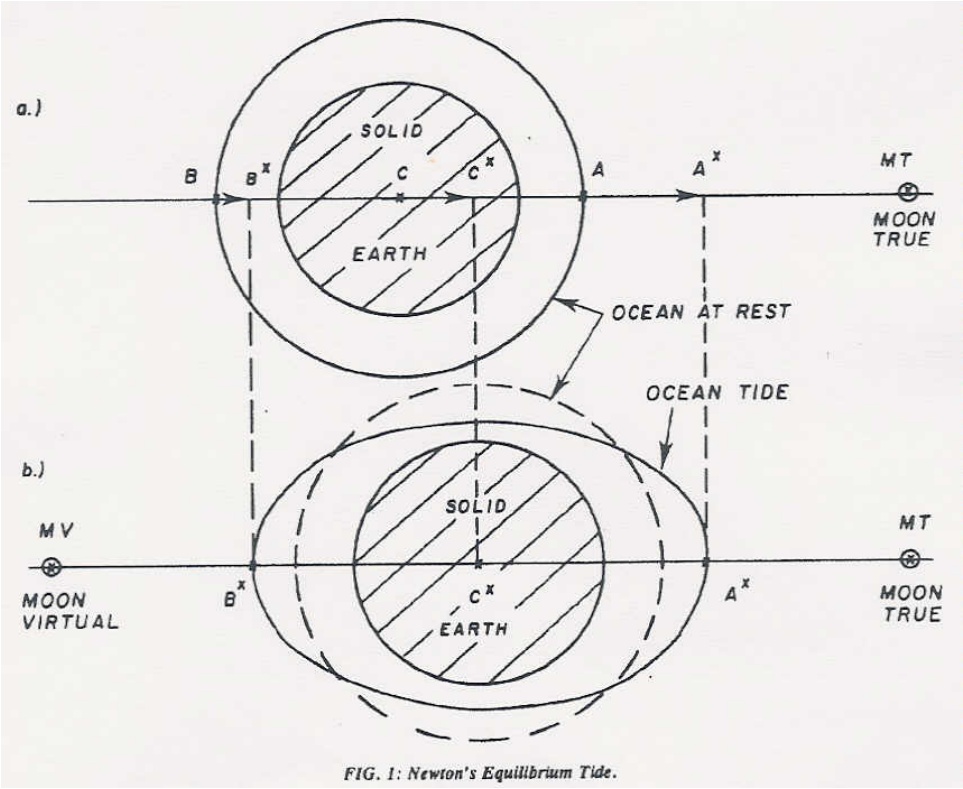

Abbildung 7: Newtons Equilibrium Tide

Die obige Abbildung a) stellt das Gleichgewichts Tide Modell von Newton dar. Darin zieht der wahre Mond (MT) den nächsten Ozean Punkt direkt von A nach A* an. Dagegen wird der entfernteste Punkt etwas weniger von B nach B* angezogen da der Einfluss der Gravitationskraft mit der Entfernung abnimmt. Durch den Einfluss des Mondes verschiebt sich dann die solide Kugelerde als Ganzes, so dass die Erd-Mitte C in der Mitte C* zwischen A* und B* erscheint. In Abbildung b) ist die Gleichgewichtstide Tide zu erkennen. Dort sieht man wie der wahre (MT) und der virtuelle (MV) Mond scheinbar die beiden täglichen Höhen A* und B* anziehen. Bei diesem Modell bleiben aber noch einige Probleme ungeklärt, zum Beispiel warum die Spitzenhöhen der Fluten nicht direkt unter Mond und Sonne erschienen. In dem folgenden 300 Jahren gelang es trotz großer Bemühungen nicht ein realistisches Tidenmodell aufzustellen. Zur ProblemIösung rief die IUGG (Internationale Union für Geodäsie und Geophysik) im Jahre 1965 eine internationale Arbeitsgruppe von Mathematikern zu Hilfe, die aber nach 10 Jahren Arbeit zu keiner zufrieden stellenden Lösung gekommen waren. Ihre mathematischen Modelle stellten zum Beispiel für den Nordpazifik Ebben voraus obwohl Fluten beobachtet wurden und umgekehrt.

Im Jahre 1972 verlangten U.S. Satelliten- bzw. Raketenprojekte eine Voraussage der Tidenhöhe auf 10 cm genau. Nach 6 Jahren Modellierzeit erschien der Nordpazifik im Frühjahr 1978 dann in naturgetreuer Gezeitenlage. Die Messwerte stimmten nun endlich mit den Berechnungen überein. Für dieses Modell wurden Mond und Sonne wegen ihrer elliptischen und schrägen Umlaufbahnen mathematisch durch eine Reihe von „scheinbaren“ Monden und Sonnen ersetzt. Diese Objekte umlaufen die Erde nun auf bestimmten Kreisbahnen mit bekannten Perioden. Um eine Genauigkeit von 10 cm zu erreichen benötigte man 6 Monde und 5 Sonnen mit 4 halbtägigen, 4 ganztätigen und 3 langen (14-tägig, monatlich und halbjährig) Perioden. Nach weiteren 6 Jahren wurde dann das Modell vom Nordpazifik auf alle Weltozeane erweitert, für die nun ein Tidenmodell mit 10 cm Genauigkeit vorhanden war. Die folgende Abbildung zeigt den zeitlichen Ablauf der M2-Tide (M2 ist die Amplitude der Teiltide des Mondes) im Nordatlantik:

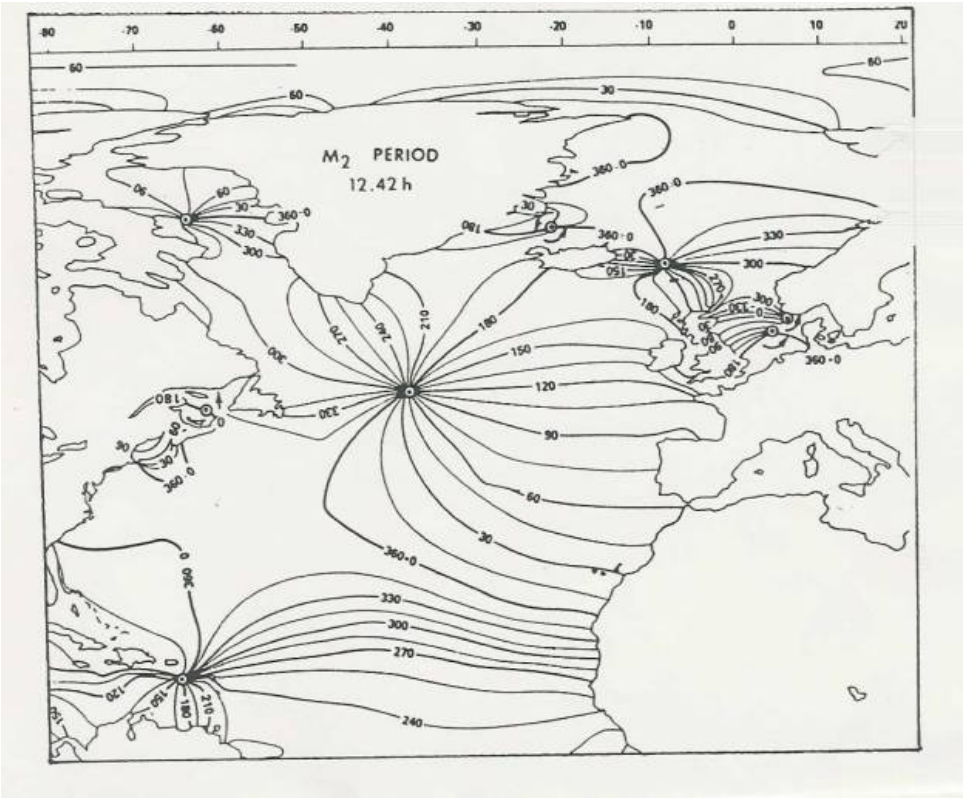

Abbildung 8: Zeitlicher Ablauf der M2-Tide im Nordatlantik

In dieser Abbildung sind die stündlichen Flutfronten zu erkennen (sie bewegen sich in ca. 1,035 Stunden 30° vorwärts), wobei die 0-Grad Flutfronten erreicht werden, wenn der Mond den Greenwich Nullmeridian passiert. Man erkennt auch verschiedene Nullhöhenpunkte, die so genannten „Amphidromen“. Diese werden von den Flutfronten in einem halben Tag einmal gegen den Uhrzeigersinn umrundet. Satellitenmission wie die TORGE/Poseidon Mission und die JASON-1 Mission erreichten für die Tidenhöhen noch einmal eine Genauigkeitssteigerung. Die TORGE/Poseidon Mission wurde 1992 gestartet und erst im Januar 2006 außer Dienst gestellt. Mit diesem Satellit war die Höhenbestimmung des Meeresspiegels mit einer Genauigkeit von besser als 5 cm möglich. Mit JASON-1 (2001 gestartet) war die Vermessung des Meerespiegels mit einer Standardabweichung von unter 4 cm

möglich.

Frühere globale Modelle wurden aus den Wassertiefen in den Weltmeeren und einer Extrapolation von beobachtenden Pegelständen auf Inseln oder Küstenstationen abgeleitet. Im Jahr 1980 entstand das Schwiderski-Modell, in dem ungefähr 2000 lokale Messungen von Pegelständen entlang der Küste und in der Nähe von Inseln mit hydrodynamischen Daten interpoliert wurden. Das ganze wurde unter dem Namen „hydrodynamische Interpolation“ bekannt. Die Auflösung dieses Modelles beträgt $1° \times 1°$ mit 9 Teiltiden (Q1,O1,P1,K1,N2,M2,S2,K2,Mf) und war auf den Bereich zwischen $77,5°$ Süd und $89,5°$ Nord begrenzt. Neben der schon erklärten M2-Tide, die von den 9 Teiltiden den stärksten Einfluss auf die Wasserhöhe ausübt, handelt es sich bei S2 zum Beispiel um die Amplitude der Teiltide der Sonne. Das Schwiderski-Modell war seit 1981 für viele Jahre das Ausgangsmodell für die Gezeitenforschung. Moderne ozeanische Gezeitenmodelle berücksichtigen neben den Wassertiefen und Pegeldaten außerdem noch die Satellitenaltimetrie und Satellitenbahnanalysen. Große Fortschritte konnten dabei besonders mit Hilfe der Daten der TOPEX/Poseidon (ab 1992) und der JASON-1 Mission (ab 2001) erzielt werden. Diese Lösungsansätze werden in Gitterform ($1° \times 1°$, $0,5° \times 0,5°$) oder als Kugelfunktionsentwicklungen dargestellt und lösen dabei 10 bis 12 Partialtiden (jährlich, halbjährlich, monatlich, vierzehntäglich, täglich, halbtäglich) auf. Das Andersen-Modell (1995). Schwintzer (1997) und Lemoine (1998) haben auch ozeanische Gezeitenmodelle in Verbindung mit globalen Schwerefeldmodulierungen berechnet. In den offenen Ozeanen werden mit Hilfe von Satellitenmissionen (s.o.) Genauigkeiten von unter 4 cm erreicht, an den Küsten und in den Schelfgebieten ist die Genauigkeit geringer, da dort noch die hemmende Wirkung der Kontinente und die ungleichen Wassertiefen einen großen Einfluss besitzen. An diesen „Randgebieten“ ist der Einfluss der Gezeiten viel höher und kann Gezeitenamplituden von mehr als 15 m verursachen, im offenen Meer beträgt der Tidenhub dagegen nicht mal einen Meter. Globale Tidenmodelle werden heutzutage vor allen Dingen für die Gezeitenvorhersage in der Navigation benötigt. Zudem werden sie zum Beispiel benötig um Wasseraustauschvorgänge in der Nordsee zu untersuchen oder um festzustellen welchen Einfluss die Gezeiten auf das Abbremsen der Erdrotation haben.

5 Gezeitenkraftwerke

Bei einem Gezeitenkraftwerk handelt es sich um ein Wasserkraftwerk, das die Energie des wechselnden Wasserpegels des Meeres zur Produktion von elektrischem Strom benutzt. Diese Art von Kraftwerken können nur an Stellen mit besonders hohem Tidenhub (ab ca. 5m) errichtet werden. Zudem wird für den Aufbau eine Bucht benötigt, die dann durch den Bau eines Dammes vom Meer getrennt wird. Im Damm befinden sich Wasserturbinen, die in beiden Durchströmungsrichtungen arbeiten und die kinetische Energie des strömenden Wassers in elektrische Energie umwandeln.

Letztlich entnehmen die Gezeitenkraftwerke ihre Energie aus der Erdrotation. Dies führt dann zu einer minimalen Abbremsung der Erddrehung, die insgesamt durch die Kraftwerke und die natürliche Gezeitenreibung ca. 0,0016 sec. pro Tag beträgt. Da die Erde wegen ihrer hohen Masse eine sehr hohe Drehenergie besitzt und die Abbremsung nur sehr klein ist werden die Wasserkraftwerke zu den regenerativen Energieformen gezählt. Zu den Vorteilen der solcher Art von Energieerzeugung gehören außerdem noch die niedrigen Betriebskosten, dass keine Luftverschmutzung entsteht wie etwa bei Kohlekraftwerken und außerdem keine Risiken für die Menschen entstehen wie bei Atomkraftwerken. Es gibt jedoch auch viele Nachteile dieses Systems. So stellen sie einen Eingriff in die betroffenen Ökosysteme dar, sind sehr teuer in ihrer Anschaffung und können nur 2000 von 8760 Stunden eines Jahres be-

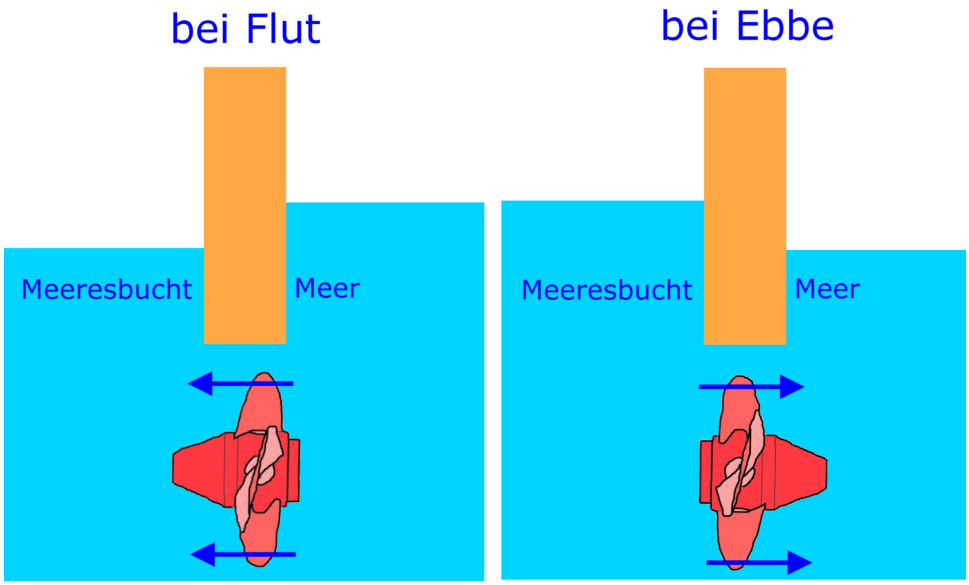

Abbildung 9: Arbeitsweise eines Gezeitenkraftwerks

trieben werden, da in der restlichen Zeit kein Gezeitenhub besteht. Da außerdem bei einer Forderung von mindestens 5 Meter Tidenhub nur etwa 100 mögliche Buchten für den Bau eines solchen Kraftwerkes vorhanden sind ist es kein Wunder, dass auf der Erde nur wenige Gezeitenkraftwerke vorhanden sind.

Literatur

[1] Wolfgang Torge, **Geodäsie, de Gruyter, 2. Auflage**

[2] Hydrography, **C.D. de Jong, G. Lachapelle, S. Skone, I.A. Elma, DUP Blue Print**

[3] Dissertation von Khaled Zahran, **„Accuracy Assessment of Ocean Tide Loading Computations for Precise Geodetic Observations“**, Hannover 2000

Internetquellen

http://www.weser-tidenrallye.de/tidenmodell.html
http://www.lerntippsammlung.de/Gezeitenkraftwerke.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Gezeiten
http://www.akueck.de/tiden.htm