

**Technische Universität**

Ausgleichsrechnung I

Prof. Dr.-Ing. L. Gründig



# **Grundlagen der Ausgleichsrechnung**

April 2003

## Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	i
1. Einführung und wiederholende Übersicht.....	1
1.1 Einführung.....	1
1.2 Literaturhinweise.....	3
2 Grundlagen für die funktionale Modellierung.....	4
2.1 Matrizenrechnung.....	4
2.1.1 Allgemeine Regeln.....	4
2.1.2 Berechnung der inversen Matrix.....	6
2.1.3 Untermatrizen.....	7
2.1.4 Skalares und dyadisches Produkt von Vektoren.....	8
2.1.5 Summenproben.....	11
2.1.6 Bilineare und quadratische Formen.....	13
2.2 Vektordifferentiation.....	16
2.2.1 Differential bei einer Funktion einer Variablen.....	16
2.2.2 Vektordifferential.....	17
2.3 Kettenregel.....	19
2.4 Produktregel.....	20
2.5 Ableitung eines Vektordiagonal-Matrix-Produktes.....	22
3 Grundbegriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.....	23
3.1 Messprozess und mathematisches Modell.....	23
3.2 Häufigkeit, relative Häufigkeit, relative Summenhäufigkeit.....	23
3.3 Wahrscheinlichkeit.....	25
3.3.1 Zusammengesetzte Ereignisse.....	25
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit.....	28
3.5 Stochastische Veränderliche, Verteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte.....	30
3.5.1 Merkmale von zufälligen Ereignissen.....	30
3.5.2 Stetige Veränderliche.....	31
3.6 Verteilungsfunktion.....	32
3.6.1.1 Diskrete Verteilungen:.....	32
3.6.1.2 Stetige Verteilungen:.....	32
3.7 Maßzahlen zur Charakterisierung von Grundgesamtheiten beliebiger Wahrscheinlichkeitsdichte.....	33
3.7.1 Erwartungswert.....	33
3.7.2 Streuung, Varianz, Dispersion, Standardabweichung.....	35
3.8 Zusammenwirken mehrerer Zufallsvariabler.....	35

3.8.1	Verteilungsfunktion und Dichte .....	35
3.8.2	Erwartungswert bei einer Funktion von mehreren Zufalls-veränderlichen.....	37
3.8.3	Varianz für Funktionen von Zufallsveränderlichen.....	39
3.8.3.1	Linearisierung von nichtlinearen Funktionen.....	39
3.8.3.2	Varianz einer linearen Funktion von korrelierten Zufallsveränderlichen $X_i$ .....	40
3.8.3.3	Varianz einer linearen Funktion von unabhängigen Zufallsveränderlichen $X_i$ .....	42
3.8.4	Kovarianz und Korrelationskoeffizient zweier Zufallsveränderlicher .....	45
3.8.4.1	Definitionen und mathematische Beziehungen .....	45
3.8.4.2	Berechnung von Kovarianzen und Kovarianzmatrizen.....	46
3.9	Effiziente Schätzung = wirksame Schätzung .....	48
3.9.1	Maximum - Likelihood - Methode = Methode der größten Mutmaßlichkeit.....	48
4	Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen .....	49
4.1	Lineare beste Schätzung der Unbekannten.....	49
4.1.1	Vorbemerkung.....	49
4.1.2	Lineare Schätzung, unverzerrt.....	49
4.1.3	Beste Schätzung .....	49
4.2	Vermittelnde Ausgleichung.....	52
4.2.1	Zusammenstellung der linearen Beziehungen bei vermittelnden Beobachtungen.....	55
4.3	Ermittlung der Kofaktoren (=Gewichtsreziproken) von Größen, welche aus der Ausgleichung hervorgehen.....	56
4.3.1	Vorbemerkungen:.....	56
4.3.2	Aufgabenstellung.....	57
4.4	Beweis der Formel $m_0 = \sqrt{[vvP] / (n - h)}$ für die vermittelnde Ausgleichung in der üblichen Darstellung.....	57
4.5	Herleitung von Gebrauchsformeln .....	60
4.6	In der Ausgleichung übliches Vorgehen .....	62
4.7	Arithmetisches Mittel mit Einführung eines Näherungswertes.....	65
4.7.1	Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels.....	66
4.7.2	Mittlerer Fehler einer Verbesserung.....	66
4.7.3	Mittlerer Fehler aus gleichgewichtigen Beobachtungsdifferenzen, konstanter Fehleranteil.....	68
4.8	Beispiel zum allgemeinen arithmetischen Mittel mit Einführung eines Näherungswertes ...	72
4.9	Einige Beispiele für das Aufstellen der Fehlergleichungen .....	74
4.9.1	Beispiel: Winkelmessung .....	74
4.9.2	Beispiel: Richtungen und Strecken .....	75
4.10	$m_0$ = Berechnung für eine Beobachtung der Ausgleichung .....	76
5	Rechentechnische Probleme bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen .....	78
5.1	Beispiel: Nivellementsnetz.....	78
5.2	Aufstellen der Normalgleichungen.....	80

5.3	Berechnung der Unbekannten; Gaußscher Algorithmus .....	80
5.4	Proben, [pvv] aus den Fehlergleichungen, mittlere Fehler, Schlußergebnis .....	81
5.5	Mittlerer Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Werte .....	82
5.6	Normalgleichungen aus Anteilen der Fehlergleichungen .....	83
5.7	Zusammenfassung von Beobachtungen .....	84
5.7.1	Mehrfache Messung der gleichen Größe .....	84
5.7.2	Zusammenfassung von Messungen verschiedener Größen zur Elimination einer nicht überbestimmten Unbekannten .....	84
5.8	Verfahren zur partiellen Elimination von Unbekannten .....	85
5.8.1	Vorbemerkungen .....	85
5.8.2	Das Eliminationsverfahren nach Schreiber .....	86
5.8.3	Das Verfahren der reduzierten Fehlergleichungen .....	88
6	Sonderformen der Ausgleichung .....	90
6.1	Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen .....	90
6.2	Herleitung der Gebrauchsformeln für die bedingte Ausgleichung .....	91
6.2.1	Allgemeiner, nichtlinearer Ansatz zur Aufstellung von Bedingungs-, Korrelaten- und Normalgleichungen .....	91
6.2.2	Linearisierung und üblicher linearer Ansatz .....	93
6.2.3	Ermittlung der Verbesserungen und der [vvp] .....	94
6.2.4	Zusammenstellung der linearen Beziehungen bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen .....	95
6.2.5	Kofaktoren von Größen, welche aus der Ausgleichung hervorgehen .....	97
6.3	Beispiel .....	98
6.4	Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten .....	101
6.5	Bedingungsgleichungen mit Unbekannten .....	104
6.6	Allgemeinfall .....	109
6.7	Anwendungsbeispiele .....	109
6.7.1	Ausgleichende Gerade .....	109
6.7.2	Ausgleichung von linearen Funktionen .....	110
6.8	Helmerttransformation .....	114
6.8.1	Lösungsansätze .....	114
6.8.2	2. Ansatz: vermittelnde Ausgleichung .....	115
6.8.3	1. Ansatz: bedingte Ausgleichung mit Unbekannten .....	118
7	Fehlerellipse und Fehlerellipsoid .....	119
7.1	Einführung und Problemstellung .....	119
7.2	Lösung .....	120
7.3	Weitere Fragestellungen bzw. Verallgemeinerungen .....	123
7.4	Herleitung mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren .....	123
7.4.1	Allgemeiner Ansatz .....	124

7.4.2	Praktische Bestimmung der Eigenwerte.....	125
7.4.3	Praktische Bestimmung der Eigenvektoren.....	126
7.5	Geometrische Deutung der bisherigen Ergebnisse (ebener Fall) .....	127
7.5.1	Hauptachsentransformation.....	127
7.5.2	Geometrische Deutung .....	129
7.5.3	Die Fußpunktkurve und ihr Zusammenhang mit der Fehlerellipse.....	131
8	Zur strengen Ausgleichung von Polygonzügen und Polygonnetzen .....	136
8.1	Voraussetzungen und Bezeichnungen.....	136
8.2	Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen .....	137
8.3	Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen.....	138
8.3.1	Die Wahl eines Hauptsystems und Bestimmung der überschüssigen Beobachtungen	138
Anhang A: Schematische Zusammenstellung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen .....		143
9	Anhang B: Schematische Zusammenstellung der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen	145

## 1. Einführung und wiederholende Übersicht

### 1.1 Einführung

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde zu Beginn des 19. Jahrhunderts ungefähr gleichzeitig von **Carl Friedrich Gauß** und A.M. **Legendre** gefunden.

#### Gauß

- 1794 gefunden (Gauß 17 Jahre alt)
- 1802 praktische Anwendung bei Berechnung Umlaufbahn Planet Ceres, welcher von ital. Astronom **Piazzi** entdeckt und an 41 Tagen nur auf  $9^\circ$  seiner Umlaufbahn beobachtet werden konnte; Wiederentdeckung gelang v. **Zach** in Gotha aufgrund der Gaußschen Berechnungen
- 1809-1826 verschiedene Veröffentlichungen von Gauß über die Methode der kleinsten Quadrate, meistens in lateinischer Sprache

#### Legendre

- 1806 erstmalig am Schluss eines Wiener Werkes über die Berechnung von Kometenbahnen veröffentlicht
- 1810 zweite Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate von Legendre veröffentlicht

Obwohl Legendre Priorität der Veröffentlichung dennoch Priorität der Entdeckung mit großer Wahrscheinlichkeit bei Gauß. Gauß bereits Ausbau zu einem praktisch anwendbaren Verfahren mit entsprechenden Bezeichnungen und entsprechender Nomenklatur, die sich bis heute erhalten haben.

Zu den Begründern ist auch **Bessel** zu zählen: Untersuchungen über die Bahn des Olberschen Kometen, Berliner Akademie der Wissenschaften 1812/13

#### Bessel

- 1837 „Gradmessung in Ostpreußen“, Lösung der Aufgabe: vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichung

Für allgemeinen Gebrauch beim Praktiker Veröffentlichungen von Gauß und Bessel zu schwierig.

Durchbruch der Methode durch Lehrbuch „Ausgleichsrechnungen in der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate“ von **GERLING**, Marburg 1843. In seiner Vorrede sagte Gerling:

*„Ich erinnere mich noch gar wohl der Zeit, wo der Landmesser, welcher mit den log. Tafeln umzugehen wusste, für den Gelehrten unter seinen Kollegen galt. Jetzt würde sich einer lächerlich zu machen glauben, wenn er sich ohne diese Kenntnisse nur zum Examen melden wollte. In ähnlicher Weise wird es demnächst wohl auch mit der Ausgleichsrechnung gehen.“*

Diese Prophezeiung wird heute wahr.

Nach anfänglichen vorwiegend astronomischen Anwendungen aufsehenerregende Bewährung in der Geodäsie bei der badischen Landesvermessung 1850 durch Obergeometer **Rheiner**.

Einführung in die Triangulation II. bis IV. Ordnung erst 30 bis 40 Jahre später.

**Friedrich Gustav Gauß** (Organisator des preuß. Katasters): 1881 Katasteranweisung IX Einführung der Methode der kleinsten Quadrate

Lehren von Gauß und ihre Weiterentwicklung zusammengefasst von F.R. **HELMERT**, 1907: „Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente“. Heute noch grundlegendes und empfehlenswertes Werk.

Wichtige Erweiterung der Technik der Methode der kleinsten Quadrate 1923 durch H. BOLTZ: „Das Entwicklungsverfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze“.

Bis vor einigen Jahrzehnten Fortschreiten und Ausbau der Methode der kleinsten Quadrate im eigenen Bereich. Neuerdings jedoch Entwicklungen mit dem Bestreben, andere Gebiete der angewandten Mathematik der Ausgleichsrechnung nutzbar zu machen.

Dabei besonders hervorzuheben:

- Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Ausgleichsrechnung (**Hugershoff, Tienstra**, welche sich mit der Bedeutung der Statistik für die Grundlagen der Ausgleichsrechnung beschäftigt). Dieser Zweig noch besonders entwicklungsfähig, besonders im Hinblick auf die Interpretation und Glaubwürdigkeit der Ergebnisse der Ausgleichsrechnung.
- Herausarbeitung von Parallelen zwischen Statistik und Ausgleichsrechnung, mit der sich eine gesamte Schule von österreichischen Geodäten um die Jahrhundertwende beschäftigte und die neuerdings mit der Ausgleichung von Trilaterationsnetzen als auch in der Analogaerometriation Bedeutung gewonnen haben. Dieser Zweig ist interessant im Hinblick auf **Stabilitätsuntersuchungen**, d.h. Genauigkeit von Punktbestimmungen in trigonometrischen Netzen.
- Einführung der Matrizenrechnung in die Ausgleichsrechnung, welche den Formelapparat selbst zwar nicht änderte, aber die Ableitungen und Zusammenhänge klarer als irgend eine andere Methode darzustellen gestattet.
- Erweiterung der Ausgleichsrechnung auf gegenseitig abhängige, d.h. **korrelierte** Größen, vor allem durch Tienstra.

**Zweck und Ziel** der Ausgleichsrechnung sind mit folgenden Stichworten zu umschreiben:

- Methode der kleinsten Quadrate berücksichtigt alle (überschüssigen) Beobachtungen zur **Ermittlung der Unbekannten gleichmäßig und frei von Willkür**.
- Sie liefert Einblick in die **Größenordnung, die Verteilung und Auswirkung der unvermeidlichen Messungsungenauigkeiten**. Mit deren Kenntnis sind daher auch Möglichkeiten zur Bekämpfung gegeben, d.h. sie trägt bei zur Auswahl geeigneter Messmethoden und -konfigurationen, und sie erlaubt ein **Urteil über die erzielte Genauigkeit** (nachträglich) **und Kontrolliertheit** (Zuverlässigkeit).
- Sie erlaubt schließlich eine Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsabschätzung **vor** der eigentlichen Messung und Beobachtung und trägt damit dazu bei, den **Gesamtmessaufwand zu ökonomisieren** (günstigste Gewichtsverteilung). Gültigkeits- und Anwendungsbereich von Näherungsverfahren deshalb immer an der strengen Methode der kleinsten Quadrate zu überprüfen und Näherungsverfahren nur dann anwenden, wenn mit wesentlich geringerem Rechenaufwand ein ähnlich plausibles und widerspruchsfreies Ergebnis wie mit der Methode der kleinsten Quadrate erreicht werden kann.

**Messkunst:**

- geometrische Modellierung
- Fehlermodellierung
- **funktionales Modell**
- **stochastisches Modell**
- Analyse, **Überprüfung**, Integration

## 1.2 Literaturhinweise

- GROßMANN, W. Grundzüge der Ausgleichsrechnung, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen, 3. Auflage 1969
- WOLF, H. Ausgleichsrechnung, Dümmler-Verlag, 1975
- HELMERT, F.R. Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, B.G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1907, 1924
- GOTTHARDT, E. Ableitung der Grundformeln der Ausgleichsrechnung mit Hilfe der Matrizenrechnung, Veröffentl. der DGK, München 1952
- TIENSTRA, J.M. Theory of the adjustment of normally distributed observations, Amsterdam 1956
- MARCHANT, R. La compensation des mesures surabondantes, Bruxelles 1956
- BJERHAMMAR, A. Alle Veröffentlichungen über Ausgleichsrechnung an der Techn. Hochschule Stockholm
- GOTTHARDT, E. Ausgleichsrechnung, Herbert Wichmann Verlag, 1969, 1978
- HÖPCKE, W. Ausgleichsrechnung, W. de Gruyter, ca. 1980

### Statistik

- HEIN Statistische Verfahren der Ingenieurpraxis, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1978
- KREYSZIG Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Vandenhoeck v. Ruprecht, Göttingen 1977, 6. Auflage
- KOCH Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Dümmler-Verlag, 1980



## 2 Grundlagen für die funktionale Modellierung

### 2.1 Matrizenrechnung

#### 2.1.1 Allgemeine Regeln

**Definition:**

Ein rechteckiges Zahlenschema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

heißt (m,n)-Matrix mit den Elementen  $a_{ik} \in \mathbb{R}$ . Speziell heißt eine

- (1,n)-Matrix      einzeilig
- (m,1)-Matrix      einspaltig
- (n,n)-Matrix      quadratisch

**Definition:**

Unter dem Transponieren (Spiegeln, Stürzen) einer Matrix versteht man das Spiegeln an der Hauptdiagonalen. Bezeichnung:  $\mathbf{A}^T$ . Dimension: (n,m)-Matrix

**Definition:**

Die Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen geschieht elementweise. Man kann immer nur Matrizen desselben Typs addieren.

**Definition:**

Unter einer Transformation von Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  in Unbestimmte  $y_1, \dots, y_m$ , d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

mit gegebener (m,n)-Matrix  $\mathbf{A}$  versteht man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

(geschrieben:  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ ).

**Definition:**

Unter der Produktmatrix **C** einer (m,n)-Matrix **A** und einer (n,p)-Matrix **B** versteht man die Matrix derjenigen Transformation, die man durch Zusammensetzen der zu **A** und **B** gehörenden Transformation erhält. Schreibweise in Elementen: (vgl. Beispiel 2.1)

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \text{ und } k = 1, \dots, p \quad (2.3)$$

D.h.:

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ \dots & c_{ik} & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

i - te Zeile k - te Spalte

Die Produktmatrix ist dann eine (m,p)-Matrix.

**Beispiel 2.1:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \end{pmatrix}$$

**Achtung:** Das **Kommutativgesetz** der Multiplikation von reellen Zahlen **gilt nicht** für die Multiplikation von Matrizen. D. h. die Faktoren einer Matrizenmultiplikation können nicht beliebig vertauscht werden.

$$\mathbf{AB} \stackrel{\text{i.A.}}{\neq} \mathbf{BA}, \quad \text{z.B. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

→ Nachrechnen!

**Definition:**

Unter der Einheitsmatrix versteht man die Matrix der identischen Transformation, also derjenigen Transformation, die die  $x_i$  in die  $x_i$  überführt.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

**Definition:**

Unter der zu einer Matrix  $\mathbf{A}$  inversen Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  versteht man im Fall  $m = n$  und  $\text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$  die Matrix derjenigen Transformation, die die  $y_i$  in die  $x_i$  transformiert ( $i = 1, \dots, n$ ), also die Matrix der inversen Transformation, d.h.:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ und } \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \tag{2.5}$$

**2.1.2 Berechnung der inversen Matrix**

Zur Berechnung der inversen Matrix gibt es zwei Möglichkeiten.

**1. Möglichkeit:**

Auflösen des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  nach den  $x_i$  mit Hilfe des **Gaußschen Eliminationsverfahrens**

**2. Möglichkeit (Anwendung der Cramerschen Regel):**

Man betrachte das lineare Gleichungssystem:  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  Auflösung nach  $x_i$ :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} y_1 - \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} y_2 + \dots$$

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_{11}|}{|\mathbf{A}|} y_1 - \frac{|\mathbf{A}_{21}|}{|\mathbf{A}|} y_2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{|\mathbf{A}_{n1}|}{|\mathbf{A}|} y_n$$

analog  $x_2, \dots, x_n$ .

Damit ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} + \frac{|\mathbf{A}_{11}|}{|\mathbf{A}|} & - \frac{|\mathbf{A}_{21}|}{|\mathbf{A}|} & \dots \\ - \frac{|\mathbf{A}_{12}|}{|\mathbf{A}|} & + \frac{|\mathbf{A}_{22}|}{|\mathbf{A}|} & \dots \\ \vdots & & \\ (-1)^{1+n} \frac{|\mathbf{A}_{1n}|}{|\mathbf{A}|} & \dots & \frac{|\mathbf{A}_{nn}|}{|\mathbf{A}|} \end{pmatrix}$$

**Satz:**

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} ((-1)^{i+k} |\mathbf{A}_{ik}|)^T \tag{2.6}$$

**Beispiel 2.2:**

gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gesucht: } \mathbf{A}^{-1}$$

$$|\mathbf{A}| = 0 - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = -4 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 4 \neq 0$$

$$A_{11} = -12 \quad A_{21} = 0 \quad A_{31} = 8$$

$$A_{12} = -8 \quad A_{22} = 0 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = 0 \quad A_{23} = -1 \quad A_{33} = -1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & +2 \\ +2 & 0 & -1 \\ 0 & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & +2 \\ +2 & 0 & -1 \\ 0 & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Es gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad (2.7)$$

d.h., eine rechtsinverse Matrix ist auch linksinvers.

**Beweis:**  $\mathbf{A}$  mit  $|\mathbf{A}| \neq 0$  Transformationen:  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$

**2.1.3 Untermatrizen**

Matrizen können in Untermatrizen aufgespalten werden; dann sind die Elemente einer solchen aufgespaltenen „Hypermatrix“ ihrerseits Untermatrizen.

Nach Unterteilung der Matrizen in

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2)$$

ergibt sich:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

In dieser Auffassung ergibt sich die Produktmatrix  $\mathbf{C}$  als das dyadische Produkt der beiden **Hypervektoren**  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ , deren Elemente die Matrizen  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  bzw.  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$  sind.



**Dyadisches Produkt** von zwei Vektoren:

Unter dem dyadischen Produkt einer einspaltigen Matrix  $\mathbf{a}$  mit den Elementen  $a_i, i = 1, \dots, m$  (Spaltenvektor mit  $m$  Elementen) mit einer einzeiligen Matrix  $\mathbf{b}^T$  mit den Elementen  $b_j, j = 1, \dots, n$  (Zeilenvektor mit  $n$  Elementen) versteht man die  $m, n$ -Matrix  $\mathbf{C}$  mit den Elementen  $c_{ij} = a_i b_j$ .

$$\mathbf{a} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_1 & b_2 & \dots & b_n) \\ a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & (\mathbf{C}) & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Bei der Anwendung des skalaren und des dyadischen Vektorprodukts auf die Multiplikation von Matrizen ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$ ) werden  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  als **Hypermatrizen** aufgefasst, deren Elemente Vektoren sind. Es ergeben sich zwei Möglichkeiten:

**1. Möglichkeit:**

$\mathbf{A}$  bestehe aus Zeilenvektoren und  $\mathbf{B}$  aus Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (\mathbf{a}_1^T) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (\mathbf{a}_2^T) & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & (\mathbf{a}_m^T) & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ (\mathbf{b}_1) & (\mathbf{b}_2) & \cdot & (\mathbf{b}_r) \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & b_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix}$$

Und somit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_r)$$

**C** ergibt sich als dyadisches Produkt der **Hypervektoren A** und **B**:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_r \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_r \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_r \\ \vdots & \vdots & (\mathbf{C}) & \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_r \end{pmatrix}
 \quad (2.12)$$

Die Elemente von **C** ergeben sich als Skalarprodukte der „Untervektoren“ von **A** und **B**, Ähnlichkeit der Gaußschen Schreibweise  $c_{ik} = [\mathbf{a}_i \mathbf{b}_k]$ .

## 2. Möglichkeit:

**A** bestehe aus Spaltenvektoren und **B** aus Zeilenvektoren

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ (\bar{\mathbf{a}}_1) & (\bar{\mathbf{a}}_2) & \cdots & (\bar{\mathbf{a}}_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}
 \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \\ \mathbf{C} \\ \\ \mathbf{A} \end{matrix}
 \begin{matrix} \mathbf{B} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \cdots & (\bar{\mathbf{b}}_1^T) & \cdots & \mathbf{b}_{1r} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \cdots & (\bar{\mathbf{b}}_2^T) & \cdots & \mathbf{b}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{b}_{n1} & \mathbf{b}_{n2} & \cdots & (\bar{\mathbf{b}}_n^T) & \cdots & \mathbf{b}_{nr} \end{pmatrix} \\ \\ \mathbf{C} \\ \\ \mathbf{B} \end{matrix}$$

D.h.: Hypervektor **A** besteht aus einer Zeile (Elemente sind Spaltenvektoren)

$$\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{a}}_1 \quad \bar{\mathbf{a}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{a}}_n)$$

und Hypervektor **B** besteht aus einer Spalte (Elemente sind Zeilenvektoren)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1^T \\ \bar{\mathbf{b}}_2^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{b}}_n^T \end{pmatrix}$$

somit:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1^T \\ \bar{\mathbf{b}}_2^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{b}}_n^T \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\bar{\mathbf{a}}_1 \quad \bar{\mathbf{a}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{a}}_n) &= \overbrace{\underbrace{\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\mathbf{b}}_1^T}_{\bar{\mathbf{C}}_1} + \underbrace{\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \bar{\mathbf{b}}_2^T}_{\bar{\mathbf{C}}_2} + \cdots + \underbrace{\bar{\mathbf{a}}_n \cdot \bar{\mathbf{b}}_n^T}_{\bar{\mathbf{C}}_n}}^{\text{dyadisches Produkt}} \\
 &= \bar{\mathbf{C}}_1 + \bar{\mathbf{C}}_2 + \cdots + \bar{\mathbf{C}}_n = \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die Produktmatrix  $\mathbf{C}$  ergibt sich als  $\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{C}}_i$ , wobei sich die  $\bar{\mathbf{C}}_i$  als dyadische Produkte  $\bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{b}}_i^T$  ergeben. (Beweis durch Nachrechnen)

**Anwendung:**

Elementeweiser Aufbau der  $C_{ik}$  bei der Multiplikation  $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$  im Computer (Die beiden Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  brauchen nicht vollständig abgespeichert zu werden!), insbesondere aber elementeweiser Aufbau von  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  bei der Ermittlung von Normalgleichungen aus Fehler- bzw. Bedingungsgleichungen!

**2.1.5 Summenproben**

Bei umfangreichen Matrizenmultiplikationen sind zur Rechenkontrolle Summenproben unerlässlich. Diese sind entweder als Zeilensummenproben oder Spaltensummenproben möglich.

**Prinzip:**

Die zur Summenprobe notwendige zusätzliche **Spaltenspalte** bzw. **Summenzeile** erhält man durch Multiplikation mit dem **Einsvektor** bzw. mit dem **transponierten Einsvektor**

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}^T = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)$$

**Zeilensummen:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \mathbf{Ae} \tag{2.14}$$





### 2.1.6 Bilineare und quadratische Formen

In der Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung treten häufig **bilineare und quadratische Formen** auf.

**Definition:**

Ein Ausdruck in der Darstellung

$$g := \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{y} \tag{2.16}$$

heißt **bilineare Form** und in der Darstellung

$$f := \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \tag{2.17}$$

heißt **quadratische Form**.

- Dabei sind  $g, f$  reelle Zahlen
- $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  Vektoren
- $\mathbf{Q}$  quadratische, im allgemeinen symmetrische Matrix, welche auch **Formmatrix** der bilinearen bzw. quadratischen Form genannt wird.

Die Ausrechnung der **bilinearen Form** im Falkschen Schema ergibt:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$= (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i Q_{i1} & \sum_{i=1}^n y_i Q_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n y_i Q_{in} \end{pmatrix} \quad (g)$$

Aus dem Falkschen Schema liest man:

$$g = x_1 \sum_{i=1}^n y_i Q_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^n y_i Q_{i2} + \cdots + x_n \sum_{i=1}^n y_i Q_{in} \tag{2.18}$$

$$g = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n y_i x_k Q_{ik}$$

Ausführlich:

$$g = x_1 y_1 Q_{11} + x_2 y_2 Q_{22} + \cdots + x_n y_n Q_{nn}$$

$$+ (x_1 y_2 + x_2 y_1) Q_{12} + (x_1 y_3 + x_3 y_1) Q_{13} + \cdots + (x_1 y_n + x_n y_1) Q_{1n}$$

$$+ (x_2 y_3 + x_3 y_2) Q_{23} + \cdots + (x_2 y_n + x_n y_2) Q_{2n}$$

$$+ \cdots \cdots \cdots$$

$$+ (x_{n-1} y_n + x_n y_{n-1}) Q_{n-1,n}$$





Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & (\mathbf{A}) & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & (\mathbf{Y}) & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^T \mathbf{A} \\ x_2^T \mathbf{A} \\ (\mathbf{X}\mathbf{A}) \\ x_m^T \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & (\mathbf{H} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y}) & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Spur } \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^m h_{ii} = x_1^T \mathbf{A} y_1 + x_2^T \mathbf{A} y_2 + \cdots + x_m^T \mathbf{A} y_m \\ &= \text{Spur } y_1 x_1^T \mathbf{A} + \text{Spur } y_2 x_2^T \mathbf{A} + \cdots + \text{Spur } y_m x_m^T \mathbf{A} \\ &= \text{Spur } \underbrace{(y_1 x_1^T + y_2 x_2^T + \cdots + y_m x_m^T)}_{=\mathbf{Y}\mathbf{X}} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Spur  $\mathbf{H} = \text{Spur } \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} = \text{Spur } \mathbf{Y}\mathbf{X}\mathbf{A} = \text{Spur } \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{X}$  nach zyklischer Vertauschung

## 2.2 Vektordifferentiation

### 2.2.1 Differential bei einer Funktion einer Variablen

- $f(x)$  Funktion einer Variablen  $x$ , differenzierbar
- $f'(x)$  Ableitung von  $f(x)$
- $dx$  beliebig (große oder kleine) reelle Zahl

**Definition:**

**Differential von  $f(x)$**  ist die von  $x$  und  $dx$  abhängige Funktion  $df$  zweier Variablen gegeben durch

$$df = f'(x)dx \tag{2.26}$$

**Geometrische Veranschaulichung:**

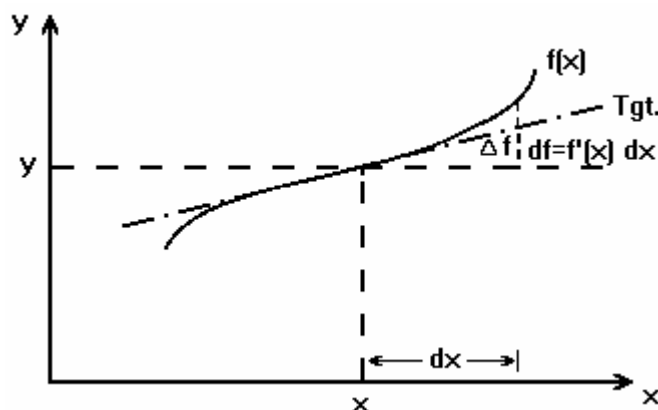


Abbildung 2.1: Unterschied zwischen  $df$  und  $\Delta f$

**Definition:**

Die **Differenzenfunktion**  $\Delta f$  ist die Funktion von den zwei Variablen  $x$  und  $dx$  gemäß

$$\Delta f = f(x + dx) - f(x) \quad (2.27)$$

Das Differential  $df$  wird zur Approximation von  $\Delta f$  verwendet (Abschätzung).

**Fehlerabschätzung:**

Die Differenz  $\Delta f - df$  ergibt sich bei zweimal differenzierbarer Funktion über **Taylor-Entwicklung** mit Restglied zweiter Ordnung aus

$$\Delta f - df = \frac{f''(\xi)}{2} dx^2 \quad \xi \in [x, x + dx] \quad (2.28)$$

$df$  ist die auf der **Tangente** berechnete Änderung von  $f$  beim Übergang von  $x$  nach  $x+dx$  (**Linearisierung**).

**2.2.2 Vektordifferential**

Es seien

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

**mehrere Funktionen von mehreren Variablen**, d.h.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Für eine Funktion von  $n$  Variablen

$$\mathbf{y} = f(x_1, \dots, x_n)$$

ergibt sich das Differential zu

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (2.29)$$

$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  sei ein  $m$ -Vektor, dessen  $m$  Komponenten Funktionen von  $n$  Variablen sind:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Wir verwenden das Differential einer Funktion  $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$

$$dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n$$



**Definition:**

Die Jakobi-Matrix eines m-Vektors  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , der vom n-Vektor abhängt, ist die (m,n)-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

$$i = \text{Zeilen}(i = 1, 2, \dots, m)$$

$$k = \text{Spalten}(k = 1, 2, \dots, n)$$
(2.34)

**Bemerkung:**

Es gilt bei

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}: \Delta \mathbf{x} = d\mathbf{x}$$

entsprechend Definition

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} - \mathbf{x} = d\mathbf{x}$$

Anwendung der Taylorformel:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \Delta \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{y} + \text{Restglieder}, \quad \text{Restglieder} \rightarrow 0$$

Beschränkung auf linearen Anteil:

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0 d\mathbf{x} \quad \text{/Iteration}$$
(2.35)

### 2.3 Kettenregel

Wir betrachten den m-Vektor  $\mathbf{a}$  abhängig vom p-Vektor  $\mathbf{y}$ . Dieser hängt ab vom n-Vektor  $\mathbf{x}$ . Gesucht ist die **Jakobi-Matrix** von  $\mathbf{a}$  bezüglich  $\mathbf{x}$ , d.h.

gesucht:  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}$ ; Ableitung von  $\mathbf{a}$  bezüglich  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1(y_1 \dots y_p) \\ \vdots \\ a_m(y_1 \dots y_p) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ y_p(x_1 \dots x_n) \end{pmatrix}$$
(2.36)

z.B.: Die 4 Richtungsmessungen  $r_1, r_1', r_2, r_2'$  werden durch 2 Winkelmessungen  $\alpha, \beta$  ersetzt.

**Behauptung:**

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}_{(m,n)}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{y}_{(m,p)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}_{(p,n)}} \quad \text{"Kettenregel"}$$

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$$
(2.37)



**Beweis** durch Vergleich der linken Seiten mit den rechten Seiten:

Formel ausführlich:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial y_1} & \frac{\partial a_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_m}{\partial y_1} & \frac{\partial a_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial a_m}{\partial y_p} \end{pmatrix}}_{(m, p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \frac{\partial y_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{(p, n)} \quad (m, n)$$

(i,k) links: 
$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial a_i}{\partial y_p} \cdot \frac{\partial y_p}{\partial x_k}$$

Kettenregel bei einer Funktion

(i,k) rechts: entsteht durch Multiplikation der i-ten Zeile mit

der k-ten Spalte also 
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial a_i}{\partial y_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial x_k}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \\ \frac{\partial x_k}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$

## 2.4 Produktregel

**Ableitung eines Skalarproduktes:**

Seien  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  zwei von  $\mathbf{x}$  abhängige  $m$ -Vektoren ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ), dann hängt auch die skalare Größe

$$\Phi = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_j a_j b_j = \Phi(\mathbf{x})$$

von  $\mathbf{x}$  ab.

Gesucht:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{\partial x_1} & \frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Typ (1, n)

Darstellung mittels  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}}$ :

$$\frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{b}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.38)$$

Produktregel

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{a}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}^T \end{pmatrix}$$

Beweis durch Vergleich: links = rechts.

**Ableitung einer Bilinearform:**

Es sei

$$\Phi = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}, \text{ (A quadratische Matrix)}$$

mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(z) \text{ und } \mathbf{y} = \mathbf{y}(z)$$

Gesucht ist die einzeilige Jakobimatrix

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial z}$$

Mit  $\mathbf{t} = \mathbf{A} \mathbf{y}$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{t})}{\partial z} &= \mathbf{x}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} + \mathbf{t}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} &= \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial z} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} + \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \quad (2.39)$$

**Ableitung einer quadratischen Form**

Es sei

$$\Phi = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \text{ (A symmetrische Matrix)}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial z} = 2 \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \quad (2.40)$$

## 2.5 Ableitung eines Vektordiagonal-Matrix-Produktes

Vorbemerkung:

$$\mathbf{z} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{y} \quad (z_i = x_i \cdot y_i) \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Schreibweise:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{x} \quad \text{Diagonalmatrixprodukt}$$

Es gilt auch:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$$

Es seien

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_u \end{pmatrix}$$

Bilde:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{y}$$

gesucht:

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{t}} = \dots$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{t}} &= \mathbf{X} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{Y} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}} \\ (n, u) &= (n, n) \quad (n, u) + (n, n) \quad (n, u) \end{aligned} \quad (2.42)$$

### 3 Grundbegriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

#### 3.1 Messprozess und mathematisches Modell

„Die Statistik als Zweig der angewandten Mathematik ist die Wissenschaft von Ereignissen, die vom Zufall abhängen.“ (ZURMÜHL)

Beobachtungen können als Zufallsereignisse betrachtet werden.

**Messprozess:** Maßzahl und Beschreibung des Messungsvorganges

**Annahme:** Beliebige viele Beobachtungen unter gleichen Messbedingungen sind möglich.

Die **Maßzahl** ist eine stochastische Größe (Zufallsgröße, **zufällige Fehler**).

Durch ein **mathematisches Modell** werden die Beziehungen der Zufallsgrößen zueinander mathematisch beschrieben. Je nach Wahl des mathematischen Modells kann die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit besser oder schlechter sein.

**Modellfehler** (systematischer Fehler): Modellfehler können bei ausreichender Beschreibung des Messvorganges durch Änderung des mathematischen Modells verringert werden.

**Ziel:** Wahl eines mathematischen Modells, für das die Modellfehler im Rahmen der Aufgabenstellung ohne Bedeutung sind.

**Irrtümer** (grobe Fehler): Für die weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass keine groben Fehler vorhanden sind.

**Problem:** Entscheidung, ob es sich ggf. tatsächlich um einen Irrtum handelt.

#### 3.2 Häufigkeit, relative Häufigkeit, relative Summenhäufigkeit

**Häufigkeit  $n_i$ :** Anzahl der Messungen, die den Messwert  $x_i$  ergeben (unter den  $n = \sum n_i$  durchgeführten Messungen)

**Relative Häufigkeit:**

$$r_i = \frac{n_i}{n} \quad \text{mit} \quad \sum r_i = 1 \quad (3.1)$$

**Relative Summenhäufigkeit:**

$$R_i = \sum_{\lambda=1}^i \frac{n_\lambda}{n} \quad 0 \leq R_i \leq 1 \quad (3.2)$$

**Erfahrungstatsache:**

Die relative Häufigkeit konvergiert stochastisch gegen einen Grenzwert, wenn die Annahme **gleicher Messbedingungen** zutrifft.

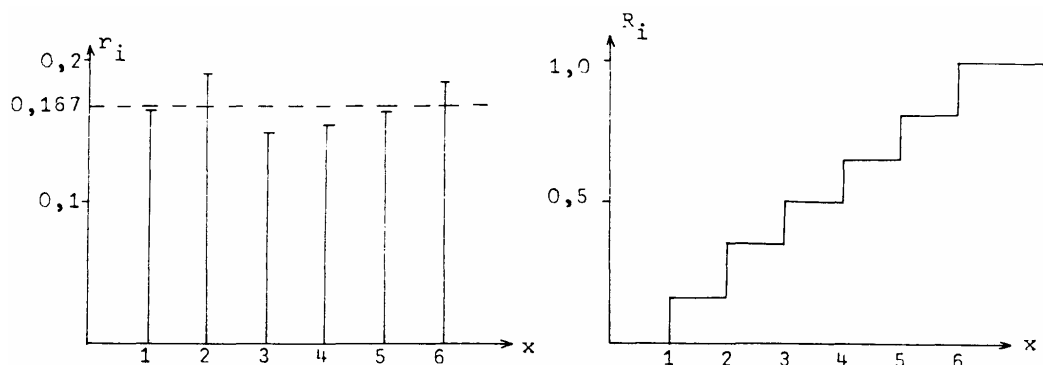


Abbildung 3.1: relative Häufigkeit und relative Summenhäufigkeit

**Beispiel 3.1:**

Relative Häufigkeit für das Ereignis „Würfeln einer 2“ bei wachsendem Stichprobenumfang n:

n	beobachtete Anzahl	Theoretische Anzahl (bei idealem Würfel)	$\Delta$	$r_i$ (beob.)	$r_i$ (theoret.) (bei idealem Würfel)
60	9	10	- 1	0,150	0,167
120	22	20	+ 2	0,183	
180	35	30	+ 5	0,194	
240	43	40	+ 3	0,179	
300	52	50	+ 2	0,173	
360	68	60	+ 8	0,189	
420	74	70	+ 4	0,176	
480	82	80	+ 2	0,171	
540	88	90	- 2	0,163	
600	96	100	- 4	0,160	
660	103	110	- 7	0,156	
720	109	120	- 11	0,151	
780	118	130	- 12	0,151	
840	130	140	- 10	0,155	
900	143	150	- 7	0,159	
960	150	160	- 5	0,161	
1020	170	170	0	0,167	
1080	186	180	+ 6	0,172	
1140	197	190	+ 7	0,173	
1200	207	200	+ 7	0,172	

### 3.3 Wahrscheinlichkeit

Jedem Ereignis  $A$  ist eine **Wahrscheinlichkeit**  $P(A)$  zugeordnet ( $P = \text{probability}$ ).

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (3.3)$$

**Definition** der Wahrscheinlichkeit nach Bernoulli/Laplace (Bernoulli 1713!, Laplace 1812-1820):

$$P = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}} \quad (3.4)$$

**Voraussetzung:**

Die einzelnen Fälle sind **gleich** möglich (Problem der Idealisierung - Mathematisches Modell).

**Definition** der Wahrscheinlichkeit von v. Mises (1931) (statistische Wahrscheinlichkeit):

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f_i}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} r_i \quad (3.5)$$

(stochastische Konvergenz)

$f_i$  = Häufigkeit des Ereignisses

$N$  = Gesamtanzahl

$r_i$  = relative Häufigkeit

**Idealisierung:**

Die Experimente wurden **unter gleichen Bedingungen** ausgeführt, d.h. alle Ereignisse müssen der gleichen Grundgesamtheit angehören.

V. Mises' Definition führt zu mathematischen Schwierigkeiten bzgl. lim-Begriff.

#### 3.3.1 Zusammengesetzte Ereignisse

1. Mit  $\bar{A}$  wird das Ereignis **Nicht A** bezeichnet.

$$A \cup \bar{A} = E \quad (A \text{ oder } \bar{A}) \quad (3.6)$$

2. Mit  $E$  wird das **sichere Ereignis** bezeichnet, entsprechend für beliebige Ereignisse  $A, B$ :

$$A \cup B = C \quad (A \text{ oder } B) \quad (\text{Vereinigungsmenge, Summe}) \quad (3.7)$$

(andere Schreibweise:  $A + B = C$ )

Das Ereignis  $C$  ist das Eintreten des Ereignisses  $A$  oder  $B$  oder auch  $A$  und  $B$  gleichzeitig.

3. **Fremde Ereignisse:** Ereignisse, die sich gegenseitig ausschließen.

Z. B. Würfel:  $A = \text{Wurf einer geraden Zahl}$   
 $B = \text{Wurf einer 3}$

4. **Teilweise überdeckte Ereignisse:**

Z. B. Würfel:  $A = \text{Wurf einer Zahl} < 3 = 1, 2$   
 $B = \text{Wurf einer geraden Zahl} = 2, 4, 6$

5. Der beiden **gemeinsame Ereignisteil** wird bezeichnet:

$$D = A \cap B \quad (\text{sowohl } A \text{ als auch } B, \text{ und}) \quad (3.8)$$

**(Durchschnittsmenge, Produkt)**      (andere Schreibweise:  $A \cdot B = D$ )

Z. B. Würfel:       $D = \text{Wurf einer } 2$

**Axiomatische Begründung** der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch KOLMOGOROFF (1933) (kein Widerspruch zu den älteren Definitionen):

1. Sind A und B Ereignisse, so sind auch  $\bar{A}$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\bar{B}$  Ereignisse.
2. Jedem Ereignis ist eine reelle Zahl  $P(A) \geq 0$  zugeordnet.
3. Ein sicheres Ereignis E hat die Wahrscheinlichkeit  $P(E) = 1$ .
4. Wenn sich A und B ausschließen, so ist  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
5. Sind  $A_1, A_2, \dots, A_n$  Ereignisse, die niemals alle gleichzeitig eintreffen können, so ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = 0 \quad (3.9)$$

**Aus den Axiomen abgeleitete Beziehungen:**

Das **unmögliche Ereignis 0** hat die Wahrscheinlichkeit 0.

$$P(0) = 0 \quad (3.10)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (3.11)$$

Für **paarweise fremde Ereignisse**  $A_1, A_2 \dots$  gilt:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (3.12)$$

Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A \cup B$  und  $A \cap B$  bei Ereignissen, die sich nicht ausschließen:

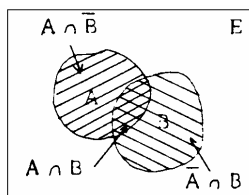


Abbildung 3.2: zusammengesetzte Ereignisse

**Ereignisse:**

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \quad (3.13)$$

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \quad (3.14)$$

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \quad (3.15)$$

**Wahrscheinlichkeiten:**

$P(A \cup B)$	$=$	$P(A \cap \bar{B})$	$+$	$P(A \cap B)$	$+$	$P(\bar{A} \cap B)$	$+$
$P(A)$	$=$	$P(A \cap \bar{B})$	$+$	$P(A \cap B)$			$-$
$P(B)$	$=$			$P(A \cap B)$	$+$	$P(\bar{A} \cap B)$	$-$
$P(A \cup B) - P(A) - P(B)$	$=$			$- P(A \cap B)$			
$P(A \cup B)$	$=$	$P(A)$	$+$	$P(B)$	$-$	$P(A \cap B)$	

**Beispiel 3.2:**

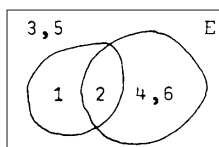


Abbildung 3.3

A: Wurf einer Zahl  $< 3$ :

1, 2;  $P(A) = \frac{2}{6}$

B: Wurf einer geraden Zahl:

2, 4, 6;  $P(B) = \frac{3}{6}$

$A \cup B$ : Wurf einer geraden Zahl oder einer Zahl  $< 3$ :

1, 2, 4, 6;  $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$

$A \cap B$ : Wurf einer geraden Zahl  $< 3$ :

2;  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$



Durch die Axiomatik ist festgelegt, wie man mit Wahrscheinlichkeiten rechnet, nicht aber, was der Begriff Wahrscheinlichkeit bedeutet. Auf eine solche Definition wird nach der objektivistischen Auffassung verzichtet; man begnügt sich mit der **Häufigkeitsinterpretation**: Bei einer langen Versuchsreihe nähert sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses, wenn die Versuchsbedingungen gleich bleiben (**stochastische Konvergenz**). Ist  $P(A) = p_i$ , so ist bei  $N$  Versuchen das Ereignis  $A$  in etwa  $Np_i$  Fällen zu erwarten (**theoretische Anzahl**).

### 3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

**Voraussetzung:**  $P(A) \neq 0$ ;  $P(B) \neq 0$

$P(A/B)$  = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $A$  unter der Voraussetzung, dass Ereignis  $B$  eingetreten ist.

$P(B/A)$  = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $B$  unter der Voraussetzung, dass Ereignis  $A$  eingetreten ist.

**Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (3.16)$$

Beispiel 3.3:

Würfel  $A = 2$   $B = \text{gerade Zahl} = 2, 4, 6$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}; P(A) = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}; P(B/A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{1} = 1$$

**Definition der stochastischen Unabhängigkeit:**

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B/A) = P(B) \quad (3.17)$$

Die Kenntnis über das Eintreten des Ereignisses  $B$  gibt keinerlei Hinweise darauf, ob das Ereignis  $A$  eintritt oder ob es nicht eintritt.

**Folgerung** aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(A \cap B) = P(A/B) P(B) = P(B/A) P(A) \quad (3.18)$$

Für **stochastisch unabhängige Ereignisse** gilt dann:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \quad (3.19)$$

**Beispiel 3.4:**

Nivellementsnetz mit drei Schleifen:

Als Zufallsereignisse werden die Vorzeichen der Widersprüche betrachtet.

Voraussetzung:

Positive und negative Vorzeichen treten gleich häufig auf; die Vorzeichen in den Schleifen sind stochastisch unabhängig.

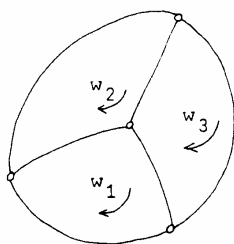


Abbildung 3.4: Nivellementscheifen

Grundgesamtheit (wenn die Voraussetzung zutrifft):			
	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>
1	+	+	+
2	+	+	-
3	+	-	+
4	+	-	-
5	-	+	+
6	-	+	-
7	-	-	+
8	-	-	-

$p_i = \text{const}$

Elementarereignisse:

A	(w <sub>1</sub> positiv)	P(A) = 0,5
$\bar{A}$	(w <sub>1</sub> negativ)	P(A) = 0,5
B	(w <sub>2</sub> positiv)	P(B) = 0,5
$\bar{B}$	(w <sub>2</sub> negativ)	P(B) = 0,5
C	(w <sub>3</sub> positiv)	P(C) = 0,5
$\bar{C}$	(w <sub>3</sub> negativ)	P(C) = 0,5

Einige zusammengesetzte Ereignisse:

$B \cap C$	(w <sub>2</sub> und w <sub>3</sub> positiv)	$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 0,25$ (wegen Annahme der Unabhängigkeit)
$B \cup C$	(w <sub>2</sub> oder w <sub>3</sub> oder beide positiv)	$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,75$
B/C	(w <sub>2</sub> positiv unter Voraussetzung, dass w <sub>3</sub> positiv)	$P(B / C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5 = P(B)$

Die Ereignisse B und C sind stochastisch unabhängig.

$B \cap C / C$  (w<sub>2</sub> und w<sub>3</sub> positiv unter Voraussetzung, dass w<sub>3</sub> positiv)

$$P(B \cap C / C) = \frac{P(B \cap C \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5 \neq P(B \cap C)$$

Das zusammengesetzte Ereignis  $B \cap C$  ist abhängig von C.

$B \cap C / \bar{C}$  (w<sub>2</sub> und w<sub>3</sub> positiv unter Voraussetzung, dass w<sub>3</sub> negativ)

$$P(B \cap C / \bar{C}) = \frac{P(B \cap C \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0}{0,5} = 0$$

Das Ereignis ist unmöglich.

$A \cap B \cap C$  (alle w sind positiv)

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,125$$

$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$  (Die drei Widersprüche haben gleiches Vorzeichen)

$$P\{(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})\} = P(A \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0,125 + 0,125 = 0,25$$

$A \cap B \cap C / B \cap C$  (Alle Widersprüche positiv unter Voraussetzung, dass  $w_2$  und  $w_3$  positiv)

$$P(A \cap B \cap C / B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{0,125}{0,25} = 0,5$$

$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) / C$  (Die drei Widersprüche haben gleiches Vorzeichen unter der Voraussetzung, dass  $w_3$  positiv)

$$P\{[(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})] / C\} = \frac{P\{[(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})] \cap C\}}{P(C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = 0,25$$

$$= P\{(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})\}$$

Die Ereignisse „gleiches Vorzeichen aller Widersprüche“ und „ $w_3$  positiv“ sind voneinander stochastisch unabhängig.

### 3.5 Stochastische Veränderliche, Verteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte

Ein Ereignis  $A$  kann als Ausfall eines stochastischen Experimentes (z.B. Wurf mit einem Würfel) durch eine Zahlenangabe charakterisiert werden. Dazu gehört eine Beschreibung des Experimentes.

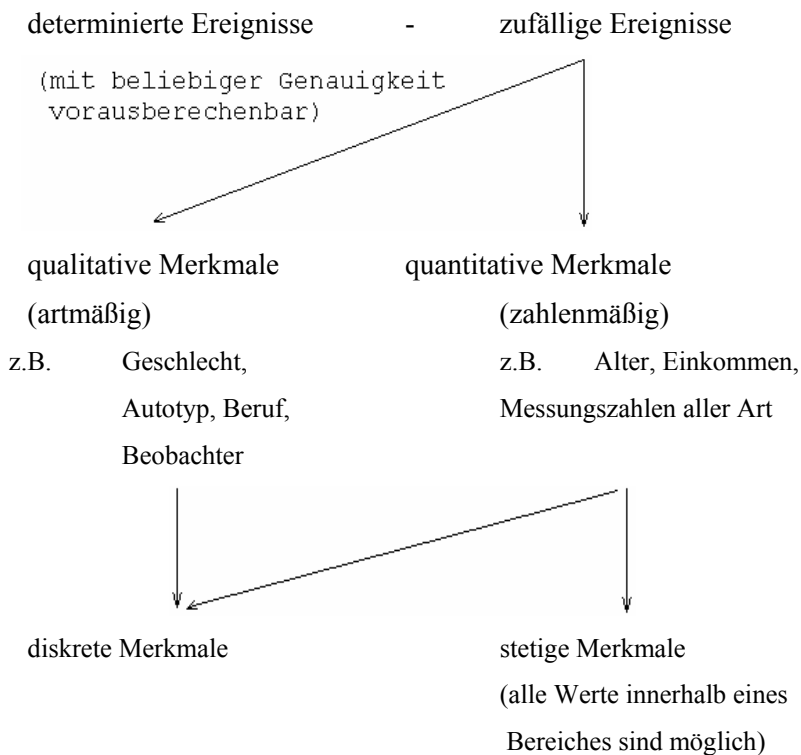
**Beispiel 3.5:**

Würfel:  $I_i =$  Augenzahl  
 Beschreibung: idealer Würfel, ggf. Angaben über die Augenzahlenanordnung

**Beispiel 3.6:**

Beobachtungen:  $I_i =$  Meßwert, Ablesung  
 Beschreibung: Messvorgang, Genauigkeitsangaben, u.U. Zusatzmessungen für Korrekturen

#### 3.5.1 Merkmale von zufälligen Ereignissen



Die Unterteilung kann bei Anwendung auf praktische Probleme nicht durchgeführt werden. Die Übergänge sind fließend.

Z.B. ist das Gewicht eines Menschen zweifellos ein stetiges Merkmal. Durch die begrenzte Messgenauigkeit einer Waage kann das Gewicht nur klassenweise erfasst werden; die Maßzahl ist diskret.

Andererseits ist das Einkommen eines Menschen sicher diskret (es kann sich nicht weniger als um einen Cent ändern). In der Praxis lassen sich derartig feinabgestufte diskrete Merkmale genauso behandeln wie stetige Merkmale.

Die dem „Experiment“ zugeordnete Variable heißt stochastische Veränderliche (**Zufallsveränderliche**).

Es wird unterschieden zwischen der **Zufallsvariablen**  $X$  und dem **Zahlenwert**  $x_i$ , der sich in dem Experiment  $i$  für die Variable ergibt.

**Beispiel 3.7:**

Würfelexperiment:  $X = \text{Augenzahl}$

$$P(X = 5) = \frac{1}{6} ; \quad P(X > 2) = \frac{2}{3}$$

**Bei diskreten Veränderlichen:**

$$P(X = x_j) = p_j$$

$$\sum p_j = 1 \tag{3.20}$$

**Beispiel 3.8:**

Würfel

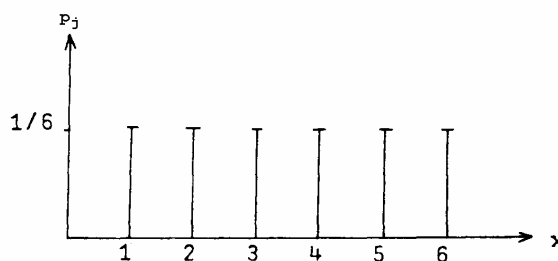


Abbildung 3.5: punktweise Massenbelegung

$p_j$  kann auch als **punktweise Massenbelegung** gedeutet werden.

**3.5.2 Stetige Veränderliche**

Hier ist es nur sinnvoll, nach der Wahrscheinlichkeit dafür zu fragen, dass das Ereignis in einem bestimmten Intervall liegt.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(t) dt \tag{3.21}$$

$f(t)$  heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte**.

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \tag{3.22}$$

**Differential an der Stelle  $t = x$**  (entspricht  $p_j$  bei diskreter Verteilung):

$$dP(x) = P(t < x < t+dt) = f(t)dt \quad (3.23)$$

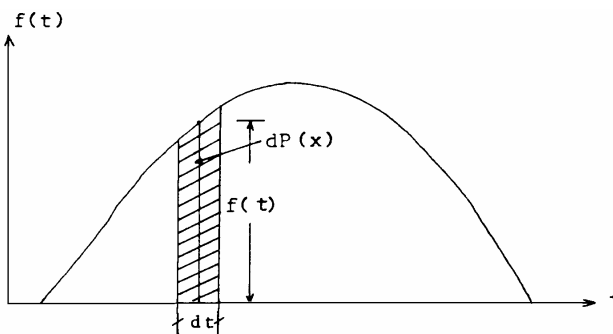


Abbildung 3.6: stetige Massenbelegung, Wahrscheinlichkeitsdichte

$f(t)$  kann auch als stetige Massenbelegung gedeutet werden (**Wahrscheinlichkeitsdichte**).

### 3.6 Verteilungsfunktion

#### 3.6.1.1 Diskrete Verteilungen:

**Definition** nach KREYSZIG:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.24)$$

(Summenkurve der  $p_j$  von  $-\infty$  bis  $X = x$  einschließlich)

Andere, jedoch nicht benutzte **Definition** nach GNEDENKO:

$$F_G(x) = P(X < x) \quad (3.25)$$

#### 3.6.1.2 Stetige Verteilungen:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = P(-\infty \leq X \leq x) \quad (3.26)$$

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1, \quad F'(x) = f(x)$$

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a < X < b)$$

$$F(b) = F(a) + P(a < X < b)$$

Wahrscheinlichkeit dafür ,dass  $X$  im Intervall  $a \dots b$  liegt:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \quad (3.27)$$

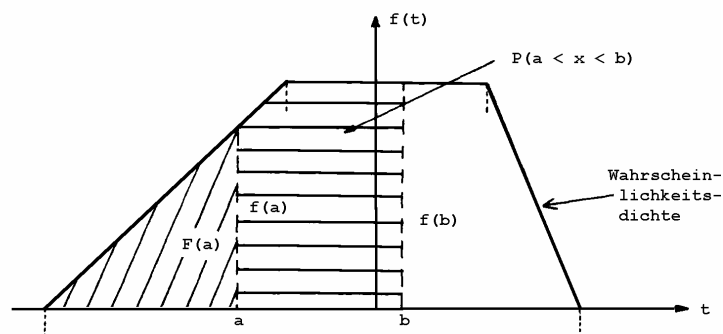


Abbildung 3.7: Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(t)$  und  $F(t)$  in unterschiedlichem Maßstab

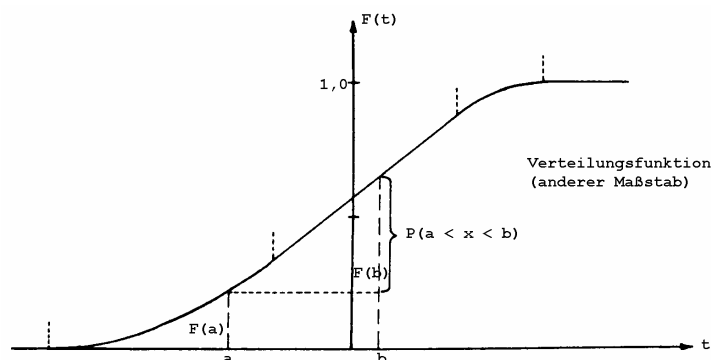


Abbildung 3.8: Wahrscheinlichkeitsfunktion

### 3.7 Maßzahlen zur Charakterisierung von Grundgesamtheiten beliebiger Wahrscheinlichkeitsdichte

#### 3.7.1 Erwartungswert

Erwartungswert:

- Mittelwert,
- **wahrer Wert** bei stetigen Verteilungen,
- Durchschnitt
- Maßstab für die Lage der Verteilung, andere Maße sind möglich
- 

**Definition** des Erwartungswertes:

für **diskrete Verteilungen**

$$\xi = E(X) = \sum x_i p_i \quad (3.28)$$

für **stetige Verteilungen**

$$\xi = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x) \quad (3.29)$$

Benutzt man v. **Mises Wahrscheinlichkeitsdefinition:**

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} r_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n} \quad (3.5)$$

so wird:

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{n_i x_i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1]}{n} \quad (3.30)$$

Ist eine Zufallsvariable oft beobachtet, so erwartet man, dass das arithmetische Mittel dem Erwartungswert sehr nahe kommt.

**Verallgemeinerung:**

$$E\{g(X)\} = \sum g(x_i) p_i \quad (3.31)$$

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot dF(x) \quad (3.32)$$

**Beispiel 3.9:**

$$g(X) = aX + b \quad (\text{lineare Funktion})$$

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) \cdot f(x) dx = a \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx}_{E(X)} + b \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_1$$

$$E(aX+b) = a(E(X) + b)$$

Eine **häufig gebrauchte lineare Funktion** ist:

$$E = \xi - X = E(X) - X \quad (3.33)$$

→ Abweichung vom Erwartungswert = **wahrer Fehler**

$$E(E) = \xi - E(X) = 0 \quad (3.34)$$

Bei nichtlinearen Funktionen  $g(X)$  ist in der Regel die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsdichte notwendig, um den Erwartungswert  $E\{g(X)\}$  berechnen zu können.

**Spezielle nichtlineare Funktionen:**

Die Erwartungswerte der Funktionen  $g(X) = x^v$  mit  $v = 0, 1, 2, \dots$  heißen **Momente**.

Die Erwartungswerte der Funktionen  $(-E)^v = (X - \xi)^v$  mit  $v = 0, 1, 2, \dots$  heißen **zentrale Momente**.

$$E(E^0) = 1 \quad (3.35)$$

$$E(E^1) = 0 \quad (3.36)$$

$$E(E^2) = E\{(\xi - X)^2\} \quad (3.37)$$

⋮

### 3.7.2 Streuung, Varianz, Dispersion, Standardabweichung

**Maß für die Breitenausdehnung der Verteilung;** andere Maße sind möglich.

**Definition der Varianz** (siehe z.B. KREYSZIG, S.87ff.):

$$\sigma^2 = E\{(X-E(X))^2\} \tag{3.38}$$

Aus der Definition abgeleitet:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{(X - \xi)^2\} = E(E^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2 f(E) dE \\ \sigma^2 &= E(X^2 - 2X\xi + \xi^2) = E(X^2) - 2\xi \cdot \underbrace{E(X)}_{\xi} + \xi^2 \\ \sigma^2 &= E(X^2) - \xi^2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Varianz = (Erwartungswert von  $X^2$ ) minus (Quadrat des Erwartungswertes von  $X$ )

Benutzt man v. **Mises Wahrscheinlichkeitsdefinition:**

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} r_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n} \tag{3.5}$$

so wird nach Abschnitt 3.7.1:

$$\sigma^2 = E(E^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n} E_i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [E^2] \tag{3.40}$$

Beachte die verschiedenen gebräuchlichen Bezeichnungen:

$\sigma^2$  = **Varianz**, Streuung, Streuungsquadrat, mittleres Fehlerquadrat, Dispersion  $D^2(X)$

$\sigma$  = **Standardabweichung**, Streuung, mittlerer Fehler

$\sigma$  bezieht sich jeweils auf ein Element der Grundgesamtheit.

**Verallgemeinerung:**

$$\sigma_g^2 = E\{(g(X) - E(g(X)))^2\} \tag{3.41}$$

Für  $g(X) = aX + b$  gilt:

$$\sigma_{aX+b}^2 = E\{(aX+b - a\xi - b)^2\} = a^2 E\{(X - \xi)^2\} = a^2 \sigma^2 \tag{3.42}$$

**(Fehlerfortpflanzungsgesetz)**

## 3.8 Zusammenwirken mehrerer Zufallsvariabler

### 3.8.1 Verteilungsfunktion und Dichte

Bei einem Experiment interessiert das gleichzeitige Eintreten mehrerer Ereignisse  $A, B, \dots$ , deren Merkmale durch die stochastischen Veränderlichen  $X, Y, \dots$  beschrieben werden.



**Bei zwei Veränderlichen:**

Zweidimensionale stetige Dichteverteilung  $f(x,y)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \tag{3.43}$$

**Definition** der Verteilungsfunktion:

$$F(x,y) = P(X < x \cap Y < y)$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, z) dt dz \tag{3.44}$$

Will man allein ein Merkmal der Verteilung untersuchen, so betrachtet man

$$F_1(x) = F(x, \infty) = P(X < x \cap Y < \infty) = P(X < x)$$

$$F_2(x) = F(\infty, y) = P(X < \infty \cap Y < y) = P(Y < y)$$

$F_1(x)$  und  $F_2(y)$  heißen **Randverteilungen**.

Sind A und B stochastisch unabhängig, so heißen auch X und Y voneinander unabhängig.

Für **unabhängige** Veränderliche gilt:

$$F(x,y) = P(X < x \cap Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \tag{3.45}$$

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{3.46}$$

**Beispiel 3.10:**

Instrumentensammlung, in der u.a. 30 Lote sind

Merkmal I : Länge der Lotschnur 1m, 2m, 3m (x)

Merkmal II : Gewicht der Lote 200g, 400g, 600g (y)

I	1m	2m	3m	$f_2(y)$
II				
200g	4	2	0	6/30
400g	3	6	4	13/30
600g	1	4	6	11/30
$f_1(x)$	8/30	12/30	10/30	

$\Rightarrow f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$ , da x und y nicht voneinander unabhängig sind.

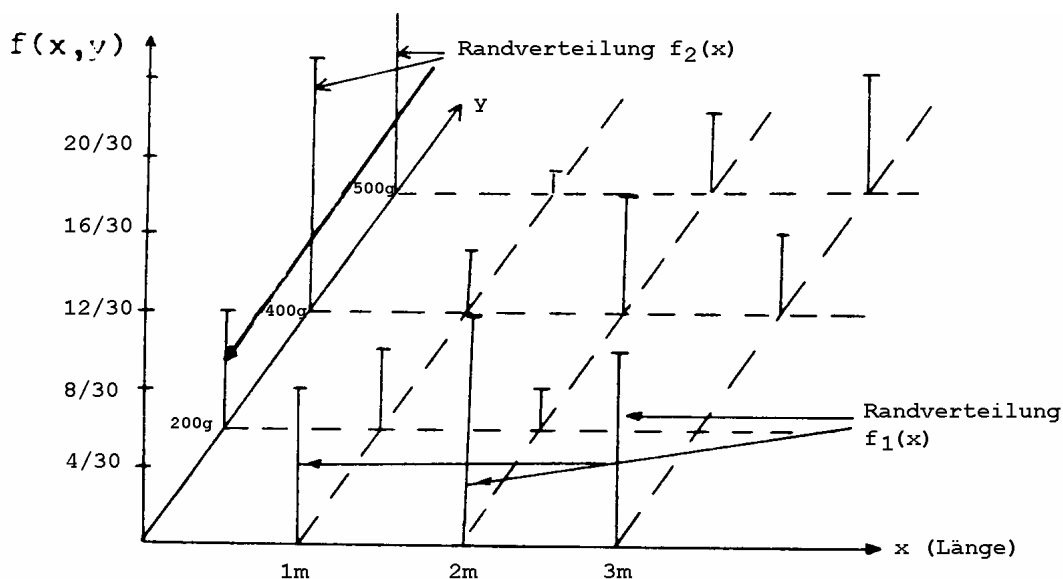


Abbildung 3.9: Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x,y)$

Bei einer stetigen zweidimensionalen Verteilung lässt sich die Dichte als Raumfläche darstellen. Die Raumfläche kann auch durch **Höhenlinien = Linien gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte** dargestellt werden.

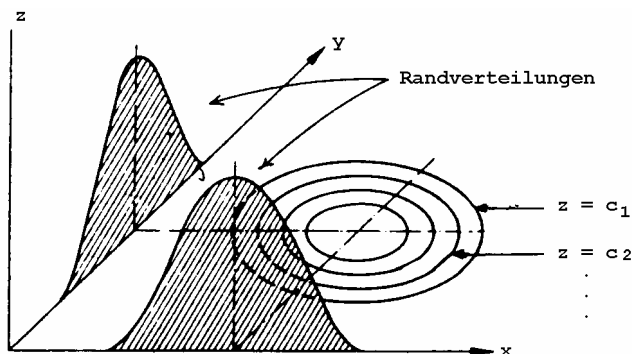


Abbildung 3.10: stetige zweidimensionale Verteilung

### 3.8.2 Erwartungswert bei einer Funktion von mehreren Zufalls-veränderlichen

**Definition:**

$$E\{g(X, Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) dF(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \cdot f(x, y) dx dy \quad (3.47)$$

**Erwartungswert für die Summe bzw. Differenz zweier Veränderlicher:**

$$g(X, Y) = X \pm Y$$

$$\begin{aligned} E(X \pm Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x \pm y) dF(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x, y) \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y dF(x, y) \\ &= E(X) \pm E(Y) \end{aligned}$$

In jedem Fall, auch wenn X und Y nicht stochastisch unabhängig sind, gilt also

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \tag{3.48}$$

(siehe **Beispiel 3.11**)

**Erwartungswert für das Produkt der Funktionen zweier Veränderlicher:**

$$g(X, Y) = g(X) \cdot h(Y)$$

$$E\{g(X) \cdot h(Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y) \cdot f(x, y) dx dy$$

Für **stochastisch unabhängige Veränderliche** zerfällt die Dichte  $f(x,y)$  in  $f_1(x)f_2(y)$ . Nur dann lässt sich das Doppelintegral durch das Produkt zweier Integrale darstellen:

$$E\{g(X) \cdot h(Y)\} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_1(x) dx}_{E\{g(X)\}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)f_2(y) dy}_{E\{h(Y)\}}$$

Bei **stochastischer Unabhängigkeit** von X und Y gilt also:

$$E\{g(X) \cdot h(Y)\} = E\{g(X)\} \cdot E\{h(Y)\} \tag{3.49}$$

**Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht allgemein:**

Wenn  $E\{g(X)\} \cdot E\{h(Y)\} = E\{g(X) \cdot h(Y)\}$  ist, so müssen nicht unbedingt X und Y voneinander unabhängig sein (siehe **Beispiel 3.12**).

**Beispiel 3.11:**

X	Y = aX	X+Y	X·Y
x <sub>1</sub>	ax <sub>1</sub>	(1+a)x <sub>1</sub>	ax <sub>1</sub> <sup>2</sup>
x <sub>2</sub>	ax <sub>2</sub>	(1+a)x <sub>2</sub>	ax <sub>2</sub> <sup>2</sup>
·	·	·	·
·	·	·	·
·	·	·	·
x <sub>n</sub>	ax <sub>n</sub>	(1+a)x <sub>n</sub>	ax <sub>n</sub> <sup>2</sup>
E(X)	E(Y)=aE(X)	E(X+Y) = (1+a)E(X)	E(X·Y) = aE(X <sup>2</sup> )
E(X)	E(Y)=aE(X)	E(X)+E(Y) = (1+a)E(X)	E(X)·E(Y) = E(X)·aE(X) = a{E(X)} <sup>2</sup> ≠ aE(X <sup>2</sup> )

**Beispiel 3.12:**

(Urne mit gleichviel Kugeln -1 und +1)

X		Y = X <sup>2</sup>		X · Y = X <sup>3</sup>	
i	p	i	p	i	p
-1	0,5	+1	0,5	-1	0,5
+1	0,5	+1	0,5	+1	0,5
E(X) = 0		E(Y) = +1		E(XY) = 0 = E(X)·E(Y)	

obgleich X und Y nicht stochastisch unabhängig sind

**3.8.3 Varianz für Funktionen von Zufallsveränderlichen**

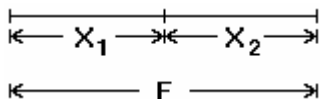
**3.8.3.1 Linearisierung von nichtlinearen Funktionen**

**Beispiel 3.13:**

Messung von zwei Bandlagen

gemessen: zwei Bandlagen

gesucht : Gesamtstrecke



$$F = X_1 + X_2$$

(lineare Funktion der Zufallsveränderlichen X<sub>1</sub> und X<sub>2</sub>)

**Beispiel 3.14:** (Dritter Winkel im Dreieck)

gemessen: zwei Winkel im Dreieck

gesucht : der dritte Winkel

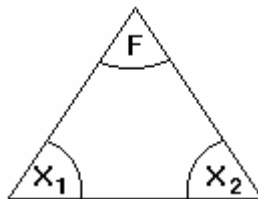


Abbildung 3.11: dritter Winkel im Dreieck

$$F = 200^\circ - X_1 - X_2$$

(lineare Funktion der Zufallsveränderlichen X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> und der Konstanten 200<sup>°</sup>)

**Beispiel 3.15:** (indirekte Entfernungsmessung)

gemessen: zwei Winkel (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>) und die Strecke (X<sub>3</sub>)

gesucht: die Strecke F

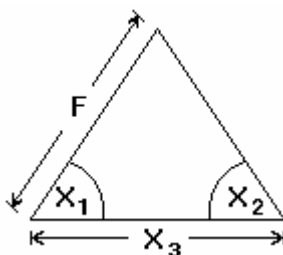


Abbildung 3.12: indirekte Entfernungsmessung

$$F = X_3 \frac{\sin X_2}{\sin(X_1 + X_2)}$$

(nichtlineare Funktion der Zufallsveränderlichen  $X_1, X_2$  und  $X_3$ )

Nichtlineare Funktionen  $F$  lassen sich unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung linearisieren, wenn  $F$  im betrachteten Bereich **stetig differenzierbar** ist.

Diese Bedingung wird im folgenden immer vorausgesetzt, soweit nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist.

$$F = f(X_1, X_2, \dots), \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots$$

$F$  sei in dem betrachteten Bereich stetig differenzierbar.

$$F = f(x_1^0, x_2^0, \dots) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 (X_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 (X_2 - x_2^0) + \dots \text{ Gl.h.O.} \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 = \text{partielle Ableitung von } f \text{ nach } x_i \text{ an der Stelle } x_1^0, x_2^0, \dots = \text{Konstante} = f_i$$

$x_1^0, x_2^0, \dots$  sind Näherungswerte, die so gewählt sind, dass man die Reihenentwicklung nach den linearen Gliedern abbrechen kann.

$$F = f_0 + f_1 (X_1 - x_1^0) + f_2 (X_2 - x_2^0) + \dots$$

$$F = f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots$$

Die Differentialquotienten  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$  können auch durch die Differenzenquotienten  $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_i}\right)$  ersetzt und direkt berechnet werden.

**Allgemeine Form der linearen Funktion  $F$  von  $n$  Zufallsveränderlichen  $X_i$ :**

$$F = f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_n X_n \quad (3.51)$$

**3.8.3.2 Varianz einer linearen Funktion von korrelierten Zufallsveränderlichen  $X_i$**

Zunächst Beschränkung auf zwei Zufallsveränderliche  $X_1$  und  $X_2$ :

$$F = f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2$$

Die Werte  $f_0, f_1$  und  $f_2$  sind durch das gewählte mathematische Modell bekannt.

$$\begin{aligned}
 E(X_1) &= \xi_1, & E(X_2) &= \xi_2 \\
 E\{(X_1 - \xi_1)^2\} &= \sigma_1^2, & E\{(X_2 - \xi_2)^2\} &= \sigma_2^2 \\
 E(F) &= \Phi = f_0 + f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2 \\
 \sigma_F^2 &= E\{(F - \Phi)^2\},
 \end{aligned}$$

(siehe Definition Erwartungswert in Abschnitt 3.7.2)

$$\begin{aligned}
 \sigma_F^2 &= E\{[f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2 - E(f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2)]^2\} \\
 \sigma_F^2 &= E\{[f_1 (X_1 - \xi_1) + f_2 (X_2 - \xi_2)]^2\} \\
 \sigma_F^2 &= E\{f_1^2 (X_1 - \xi_1)^2\} + E\{f_2^2 (X_2 - \xi_2)^2\} + 2f_1 f_2 E\{(X_1 - \xi_1)(X_2 - \xi_2)\} \\
 \sigma_F^2 &= f_1^2 \cdot E\{(X_1 - \xi_1)^2\} + f_2^2 \cdot E\{(X_2 - \xi_2)^2\} + 2f_1 f_2 \cdot E\{(X_1 - \xi_1)(X_2 - \xi_2)\} \\
 \sigma_F^2 &= f_1^2 E(E_1^2) + f_2^2 E(E_2^2) + 2f_1 f_2 E(E_1 E_2) \\
 \sigma_F^2 &= f_1^2 \sigma_1^2 + f_2^2 \sigma_2^2 + 2f_1 f_2 E(E_1 E_2) \\
 E(E_1 E_2) &= E\{(X_1 - \xi_1)(X_2 - \xi_2)\} = \text{Cov}(X_1; X_2)
 \end{aligned}$$

Allgemeine Definition der Kovarianz zweier Zufallsveränderlicher  $X_i$  und  $X_k$  (siehe Abschnitt 3.8.4)

**Fehlerfortpflanzungsgesetz für korrelierte Beobachtungen:**

$$\sigma_F^2 = f_1^2 \sigma_1^2 + 2f_1 f_2 \text{Cov}(X_1; X_2) + f_2^2 \sigma_2^2 \quad (3.52)$$

**Erweiterung für mehr als zwei Zufallsveränderliche:**

$$\begin{aligned}
 F &= f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + \dots \\
 \sigma_F^2 &= f_1^2 \sigma_1^2 + 2f_1 f_2 \text{Cov}(X_1, X_2) + 2f_1 f_3 \text{Cov}(X_1, X_3) + \dots \\
 &\quad + f_2^2 \sigma_2^2 + 2f_2 f_3 \text{Cov}(X_2, X_3) + \dots \\
 &\quad + f_3^2 \sigma_3^2 + \dots
 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Um die Varianz  $\sigma_F^2$  berechnen zu können, müssen neben den Varianzen  $\sigma_i^2$  auch alle Kovarianzen  $\text{Cov}(X_i, X_k)$  bekannt sein (**Kovarianzmatrix**).

Darstellung der Varianz  $\sigma_F^2$  als quadratische Form in Matrixschreibweise:

$$F - f_0 = f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots = \mathbf{f}^T \mathbf{X} \quad (3.54)$$

mit:  $\mathbf{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  (Vektor der bekannten Koeffizienten der Zufallsveränderlichen  $X_i$ )  
und

$\mathbf{X}^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  (Vektor der Zufallsveränderlichen)

**Kovarianzmatrix der Zufallsveränderlichen  $X_i$ :**

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Cov}(X_1, X_3) & \dots \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \text{Cov}(X_2, X_3) & \dots \\ \text{Cov}(X_3, X_1) & \text{Cov}(X_3, X_2) & \sigma_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Falksches Schema:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Cov}(X_1, X_3) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \text{Cov}(X_2, X_3) \\ \text{Cov}(X_3, X_1) & \text{Cov}(X_3, X_2) & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \\ (f_1 \ f_2 \ f_3) \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} (\sigma_F^2) \\ \sigma_F^2 = f^T C_{xx} f \quad (3.56)$$

**3.8.3.3 Varianz einer linearen Funktion von unabhängigen Zufallsveränderlichen  $X_i$**

Für den Spezialfall **unabhängiger Beobachtungen** gilt (siehe Abschnitt 3.8.2):

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_k) &= E\{(X_i - \xi_i)(X_k - \xi_k)\} = E(X_i - \xi_i) \cdot E(X_k - \xi_k) \\ &= E(E_i) \cdot E(E_k) = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Das entspricht bei der **v. Mises'schen Definition** dem Ausdruck:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [E_i E_k] = 0 \quad (3.58)$$

**Kovarianzmatrix für unabhängige Zufallsveränderliche:**

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \sigma_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Zufallsveränderliche, für die die Kovarianz Null ist, heißen **unkorreliert**. Stochastisch unabhängige Größen sind immer unkorreliert. Die Umkehrung gilt aber nicht (siehe **Beispiel 3.12**).

**Spezielles Fehlerfortpflanzungsgesetz für lineare Funktionen unabhängiger Beobachtungen:**

$$F - f_0 = f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots = f^T X$$

mit  $f^T = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

$X^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

und  $C_{xx}$  als Diagonalmatrix

$$\sigma_F^2 = f^T C_{xx} f$$

$$\sigma_F^2 = f_1^2 \sigma_1^2 + f_2^2 \sigma_2^2 + \dots + f_n^2 \sigma_n^2 = \sum_{\lambda=1}^n (f_\lambda \sigma_\lambda)^2 \quad (3.60)$$

**Hinweis:**

Da hier von der Eigenschaft  $\text{Cov}(X_i, X_k) = 0$  Gebrauch gemacht wird, gilt die Gleichung nicht nur für unabhängige, sondern im allgemeinen Sinn für nicht korrelierte Zufallsveränderliche.

**Grundsätzliche Beispiele, die häufig verwechselt werden:**

1. n voneinander unabhängige Zufallsgrößen werden addiert (n-maliges Aneinanderfügen)  
(siehe Beispiel 3.13)

$$\begin{aligned} F &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \sigma_F^2 &= 1 \cdot \sigma_1^2 + 1 \cdot \sigma_2^2 + \dots + 1 \cdot \sigma_n^2 \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma \\ \sigma_F^2 &= n \cdot \sigma^2 \\ \sigma_F &= \sigma \sqrt{n} \end{aligned} \quad (3.61)$$

2. **Aber:** Eine Zufallsgröße wird mit n multipliziert (siehe Beispiel 3.15)

$$\begin{aligned} F &= n \cdot x_1 \\ \sigma_1 &= \sigma \\ \sigma_F^2 &= n^2 \cdot \sigma^2 \\ \sigma_F &= n \cdot \sigma \end{aligned} \quad (3.62)$$

3. **Arithmetisches Mittel aus n Zufallsgrößen** (n-malige Wiederholung)

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ \sigma_F^2 &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_n^2 \quad \text{mit } \sigma_i = \sigma \Rightarrow \\ \sigma_F^2 &= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2) = n \cdot \frac{1}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \\ \sigma_F &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

**Bemerkungen:**

- Ist die Funktion F nicht linear in  $X_i$ , so muss sie linearisiert werden. An die Stelle der  $X_i$  treten die  $dX_i$  bzw.  $\Delta X_i$ .
- Vor Anwendung der Formel für  $\sigma_F^2$  sind alle Anteile, die zu einem Differential  $dx_i$  gehören, zusammenzufassen.



**Aber:**

Haben mehrere Messungen  $x_i, x_k$  gleiche Standardabweichungen  $\sigma_i = \sigma_k$ , so darf erst in der Gleichung  $\sigma_F^2 = \dots$  die Standardabweichung  $\sigma_i = \sigma_k$  gesetzt werden.

**Beispiel 3.16:**

Berechnung einer Dreiecksfläche

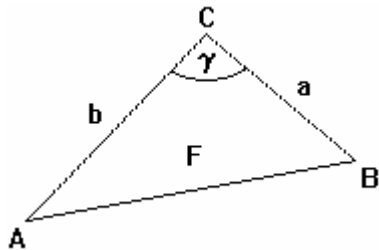


Abbildung 3.13: Dreiecksfläche

gegeben:  $a \pm \sigma_a$   
 $b \pm \sigma_b$   
 $\gamma \pm \sigma_\gamma$

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & & 0 \\ & \sigma_b^2 & \\ 0 & & \sigma_\gamma^2 \end{pmatrix}$$

gesucht:  $F \pm \sigma_F$

$$F = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$dF = \frac{1}{2} b \cdot \sin \gamma \cdot da + \frac{1}{2} a \cdot \sin \gamma \cdot db + \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma$$

Dimensionskontrolle:  $d\gamma$  im Bogenmaß:

$$dF = \frac{F}{a} da + \frac{F}{b} db + \frac{F}{\tan \gamma} d\gamma$$

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{F}{a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{F}{b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{F}{\tan \gamma}\right)^2 \sigma_\gamma^2 \quad \text{mit} \quad \sigma_\gamma = \frac{\sigma_\gamma^{cc}}{\rho^{cc}}$$

Für den Spezialfall  $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_s^2$  darf erst jetzt zusammengefasst werden.

$$\sigma_F^2 = \left[ \left(\frac{F}{a}\right)^2 + \left(\frac{F}{b}\right)^2 \right] \sigma_s^2 + \left(\frac{F}{\tan \gamma}\right)^2 \left(\frac{\sigma_\gamma^{cc}}{\rho^{cc}}\right)^2$$

$$\sigma_F = \sqrt{\left[ \left(\frac{F}{a}\right)^2 + \left(\frac{F}{b}\right)^2 \right] \sigma_s^2 + \left(\frac{F}{\tan \gamma}\right)^2 \left(\frac{\sigma_\gamma^{cc}}{\rho^{cc}}\right)^2}$$

### 3.8.4 Kovarianz und Korrelationskoeffizient zweier Zufallsveränderlicher

#### 3.8.4.1 Definitionen und mathematische Beziehungen

$$\text{Cov}(X_i, X_k) = E\{(X_i - \xi_i)(X_k - \xi_k)\} \quad (3.64)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_k) = E(X_i X_k) - \underbrace{\xi_i E(X_k)}_{\xi_i \xi_k} - \underbrace{\xi_k E(X_i)}_{\xi_i \xi_k} + \xi_i \xi_k$$

$$\text{Cov}(X_i, X_k) = E(X_i \cdot X_k) - \xi_i \cdot \xi_k \quad (3.65)$$

Für  $i = k$  erhält man die Definitionsgleichung der Varianz:

$$\text{Cov}(X_i, X_i) = E\{(X_i - \xi_i)^2\} = \sigma_i^2 \quad (3.66)$$

$$\text{Cov}(aX_i, bX_k) = E\{(aX_i - a\xi_i)(bX_k - b\xi_k)\} = ab \text{Cov}(X_i, X_k) \quad (3.67)$$

Die Kovarianz ist also als Maß der Korrelation ungeeignet.

**Korrelationskoeffizient:**

$$\rho_{i,k} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_k)}{\sigma_i \sigma_k} \quad (3.68)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_k) = \rho_{ik} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_k \quad (3.69)$$

$$\rho_{aX_i, bX_k} = \frac{a \cdot b \cdot \text{Cov}(X_i, X_k)}{a \cdot \sigma_i \cdot b \cdot \sigma_k} = \rho_{i,k} \quad (3.70)$$

Der Korrelationskoeffizient ist unabhängig von der Wahl der Zufallsveränderlichen.

Für  $X_k = bX_i$  wird:

$$\sigma_k^2 = b^2 \sigma_i^2$$

$$\text{Cov}(X_i, X_k) = b \sigma_i^2$$

$$\rho_{i,k} = \frac{b \cdot \sigma_i^2}{b \cdot \sigma_i \cdot \sigma_i} = +1$$

Für  $X_k = -bX_i$  wird entsprechend:

$$\rho_{i,k} = -1$$

Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die lineare Abhängigkeit zweier Zufallsveränderlicher.

Für die Funktion  $F = \frac{1}{\sigma_i} X_i \pm \frac{1}{\sigma_k} X_k$  gilt:

$$\sigma_F^2 = \left\{ \frac{1}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 + \frac{1}{\sigma_k^2} \sigma_k^2 \pm 2 \frac{1}{\sigma_i \sigma_k} \underbrace{\text{Cov}(X_i, X_k)}_{\rho_{i,k} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_k} \right\} \geq 0$$

$$\sigma_F^2 = 2 \pm 2\rho_{i,k} \geq 0$$

Die Ungleichung ist nur erfüllt für  $-1 \leq \rho_{ik} \leq +1$ .

### 3.8.4.2 Berechnung von Kovarianzen und Kovarianzmatrizen

Zunächst wieder Beschränkung auf **zwei Zufallsveränderliche**  $X_1$  und  $X_2$ . Zur weiteren Bezeichnung und zu den Einzelschritten der Ableitung siehe Abschnitt 3.8.3.2.

$$F = f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2$$

$$G = g_0 + g_1 X_1 + g_2 X_2$$

$$\text{Cov}(F, G) = E\{(F - E(F))(G - E(G))\} \quad (\text{gemäß Definition der Kovarianz (3.64)})$$

Die Konstanten  $f_0$  und  $g_0$  haben für die weiteren Berechnungen keine Bedeutung.

$$\text{Cov}(F, G) = E\{[f_1(X_1 - \xi_1) + f_2(X_2 - \xi_2)] \cdot [g_1(X_1 - \xi_1) + g_2(X_2 - \xi_2)]\}$$

$$\text{Cov}(F, G) = E\{f_1 g_1 (X_1 - \xi_1)^2 + f_1 g_2 (X_1 - \xi_1)(X_2 - \xi_2) + f_2 g_1 (X_1 - \xi_1)(X_2 - \xi_2) + f_2 g_2 (X_2 - \xi_2)^2\}$$

$$\text{Cov}(F, G) = f_1 g_1 \cdot E(X_1 - \xi_1)^2 + (f_1 g_2 + f_2 g_1) \cdot E\{(X_1 - \xi_1)(X_2 - \xi_2)\} + f_2 g_2 \cdot E(X_2 - \xi_2)^2$$

$$\text{Cov}(F, G) = f_1 g_1 \cdot \sigma_1^2 + (f_1 g_2 + f_2 g_1) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) + f_2 g_2 \cdot \sigma_2^2 \quad (3.71)$$

**Erweiterung auf n Zufallsveränderliche  $X_i$  :**

$$\begin{aligned} \text{Cov}(F, G) &= f_1 g_1 \cdot \sigma_1^2 + f_1 g_2 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) + f_1 g_3 \cdot \text{Cov}(X_1, X_3) + \dots \\ &\quad + f_2 g_1 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) + f_2 g_2 \cdot \sigma_2^2 + f_2 g_3 \cdot \text{Cov}(X_2, X_3) + \dots \\ &\quad + f_3 g_1 \cdot \text{Cov}(X_1, X_3) + f_3 g_2 \cdot \text{Cov}(X_2, X_3) + f_3 g_3 \cdot \sigma_3^2 + \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die Kovarianz  $\text{Cov}(F, G)$  kann als bilineare Form mit der Kovarianzmatrix  $C_{xx}$  der Zufallsveränderlichen  $X_i$  als Formmatrix aufgefasst werden.

$$\text{Cov}(F, G) = f^T C_{xx} g = g^T C_{xx} f \quad (3.73)$$

Für den Spezialfall unabhängiger Zufallsveränderlicher  $X_i$  gilt Abschnitt 3.8.3.3:

$C_{xx}$  ist dann die **Diagonalmatrix**:

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$



**Verallgemeinerung** für die Kovarianzmatrix  $C_{GG}$ , wenn die Funktionen  $G_1 \dots G_r$  Funktionen der  $F_1 \dots F_u$  und diese Funktionen der  $X_1 \dots X_n$   $\mathbf{m}$  sind:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

$$C_{FF} = \mathbf{F} \cdot C_{XX} \mathbf{F}^T$$

$$C_{GG} = \mathbf{G} C_{FF} \tag{3.78}$$

$$\mathbf{G}^T = \mathbf{G} \mathbf{F} C_{XX} \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \tag{3.79}$$

**Zum Rechengang:**

1. Die Kovarianzmatrix  $C_{XX}$  ist aufgrund theoretischer Überlegungen oder aus Vorberechnungen bekannt.  $C_{FF}$  wird berechnet und damit  $C_{GG}$ .
2. Die  $X$  sind aufgrund des mathematischen Modells unabhängige Zufallsveränderliche. Die  $C_{XX}$ -Matrix ist dann eine Diagonalmatrix. Wenn nur die Matrix  $C_{GG}$  benötigt wird, kommt man in dem Fall ohne Berechnung der  $C_{FF}$ -Matrix aus; dafür muss aber das Matrizenprodukt  $\mathbf{GF}$  berechnet werden (Rückführung auf unabhängige Beobachtungen).

**3.9 Effiziente Schätzung = wirksame Schätzung**

Die Schätzung  $x$  für den Erwartungswert soll so bestimmt werden, dass für eine beliebige Funktion

$$\mathbf{F} = f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots = f_0 + \mathbf{f}^T \mathbf{X}$$

gilt

$$\sigma_F^2 = \mathbf{f}^T C_{XX} \mathbf{f} \rightarrow \text{Minimum}$$

Die Forderung ist gleichbedeutend mit:

$$\sigma_X^2 = \text{Minimum}$$

und

$$[(x - l_i)^2] = \text{Minimum.}$$

Die Abweichungen  $v_i$  der Beobachtungen  $l_i$  von der Schätzung  $x$  werden als **Verbesserungen**  $v_i$  bezeichnet:

$$l_i + v_i = x \tag{3.80}$$

$$v_i = x - l_i$$

Damit gilt auch die **Forderung**:

$$[v v] = \text{Minimum}$$

**(Methode der kleinsten Quadrate)**

**3.9.1 Maximum - Likelihood - Methode = Methode der größten Mutmaßlichkeit**

Diese Methode zur Schätzung von Parametern setzt eine Annahme über die Verteilung der Messwerte voraus (siehe Abschnitt über die Normalverteilung).

## 4 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

### 4.1 Lineare beste Schätzung der Unbekannten

#### 4.1.1 Vorbemerkung

Die Genauigkeit berechneter (unbekannter) Größen wird durch die Hauptdiagonalglieder der betreffenden Kovarianzmatrix beurteilt.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \rightarrow C_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \cdots \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \cdots & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

Als Maß für **alle** Unbekannten führt man die **Spur der Kovarianzmatrix** ein:

$$\text{Spur}(C_x) = \text{Summe über die Diagonalelemente}$$

#### 4.1.2 Lineare Schätzung, unverzerrt

Sei  $\mathbf{l}$  Beobachtungsvektor für Unbekannte  $\mathbf{x}$  in dem Zusammenhang  $\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  ( $\mathbf{l}$  ist Zufallsvektor, dann sind auch  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{v}$  Zufallsvektoren!) mit der Kovarianzmatrix  $C_l$ .

1. Die Unbekannten  $\mathbf{x}$  sollen über eine lineare Rechnung aus  $\mathbf{l}$  gewonnen werden, d.h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{l} \tag{4.1}$$

$\mathbf{G}$  ist gesucht!

2.  $\mathbf{x}$  soll unverzerrt sein, d.h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{v}) \tag{4.2}$$

Erwartungswerte:

$$E(\mathbf{x}) = \mathbf{G} (\mathbf{A} \cdot E(\mathbf{x}) - E(\mathbf{v}))$$

Forderung:

$$E(\mathbf{v}) = 0 : \text{unverzerrt,}$$

d.h.

$$E(\mathbf{x}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot E(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} (= \text{Einheitsmatrix}) \tag{4.3}$$

#### 4.1.3 Beste Schätzung

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{l} \tag{4.4}$$

dann ist die Kovarianzmatrix  $C_x$ :

$$C_x = \mathbf{G} C_l \mathbf{G}^T \tag{4.5}$$



mit

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{mj} \end{pmatrix} \quad (\text{m Anzahl der Unbekannten})$$

$$\phi_{g_j} = 2 \mathbf{g}_j^T \mathbf{C}_1 - 2 \lambda_j^T \mathbf{A}^T = 0 \quad (4.9)$$

$$\phi_{\lambda_j} = \mathbf{g}_j^T \mathbf{A} - \mathbf{e}_j^T = 0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{g}_j - \mathbf{A} \lambda_j = 0 \quad (\text{I})$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{g}_j = \mathbf{e}_j \quad (\text{II})$$

Die Gleichungen (I) und (II) gelten für  $j = 1, 2, \dots, m$

Sie können in Matrixschreibweise zusammengefasst werden:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) \\ \mathbf{g}_j \\ \left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) \end{pmatrix} \mathbf{G}^T$$

$$\left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) \begin{array}{c} \mathbf{c}_1 \\ | \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{g}_j \\ | \\ | \end{array}$$

Ersetze:

$$\mathbf{g}_j \rightarrow \mathbf{G}^T$$

$$\lambda_j \rightarrow \Lambda$$

$$\mathbf{e}_j \rightarrow \mathbf{E}$$

damit (I) und (II):

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{G}^T - \mathbf{A} \Lambda = 0 \quad (\text{I})$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G}^T = \mathbf{E} \quad (\text{II})$$

aus (I):

$$\mathbf{G}^T = [\mathbf{C}_1]^{-1} \mathbf{A} \Lambda$$



in (II):

$$A^T [C_1]^{-1} A \Lambda = E$$

$$\Lambda = (A^T [C_1]^{-1} A)^{-1}$$

eingesetzt:

$$G^T = [C_1]^{-1} A (A^T [C_1]^{-1} A)^{-1}$$

$$G = \underbrace{(A^T [C_1]^{-1} A)^{-1}}_{P_1} A^T [C_1]^{-1} \quad (4.11)$$

**Bemerkungen:**

- bzgl. Statistik keine Voraussetzung über Verteilung getroffen!
- nur Forderung  $E(v) = 0$
- nur lineare Rechnung!

**4.2 Vermittelnde Ausgleichung**

Zwischen den **ausgeglichenen** Beobachtungen  $\bar{l}_1 \dots \bar{l}_n$  und den  $h$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_h$  mit  $n > h$  gelten die Beziehungen:

$$\bar{l} = l + v = Ax \quad (4.12)$$

Die ausgeglichenen Beobachtungen  $\bar{l}$  ergeben sich durch Addition der Verbesserungen  $v$  zu den Beobachtungen. Die Beobachtungen sind ferner durch die Kofaktorenmatrix  $Q_{11} = (1/m_0^2) C_{11}$  beschrieben.

Nach der **Methode der kleinsten Quadrate** wird ein Lösungsvektor  $x$  der Gestalt gesucht, für welchen  $v^T [Q_{11}]^{-1} v$  minimal wird.

Mit  $P = [Q_{11}]^{-1}$ , der Gewichtsmatrix, ergibt sich die folgende **Minimierungsaufgabe**:

$$\phi = v^T P v \implies \min \quad (4.13)$$

Mit

$$v = Ax - l \quad (4.14)$$

erhält man:

$$\Phi = (x^T A^T - l^T) P (Ax - l)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$A^T P A x - A^T P l = 0$$

$$A^T P A x = A^T P l$$

Minimum, weil  $A^T P A$  positiv definit (2. Ableitung)

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (4.15)$$

Da

$$P = m_0^2 [C_{ll}]^{-1}$$

gilt auch:

$$x = (A^T [C_{ll}]^{-1} A)^{-1} A^T [C_{ll}]^{-1} l$$

Die Minimierung der Quadratsumme der Verbesserungen und die Minimierung der Varianzen der Unbekannten sind äquivalent!

Für die übrigen Parameter gilt:

$$v = Ax - l = (A (A^T P A)^{-1} A^T P - E) l \quad (4.16)$$

$$\bar{l} = Ax = A (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (4.17)$$

aus

$$\phi = v^T P v \implies \min$$

folgt auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$2v^T P \frac{\partial v}{\partial x} = v^T P A = 0$$

$$A^T P v = 0 \quad (4.18)$$

**Wichtige Matrix** bei vermittelnden Beobachtungen ist:

$$A_0 = A (A^T P A)^{-1} A^T P \quad (4.19)$$

Eigenschaften:

1. **spezielle Einheitsmatrix**, da:  $A_0 \cdot A_0 = A_0$
2.  $A_0 \cdot A = E \cdot A = A$  (nachrechnen!)
3.  $A_0 v = 0$
4. Eigenwerte von  $A_0$  sind 0 oder (und) 1:

Für einen **Eigenwert**  $\lambda$  mit dem zugehörigen **Eigenvektor**  $x$  muss gelten:

$$A_0 x = \lambda x \quad (*)$$

$$A_0 A_0 x = \lambda A_0 x$$

$$A_0 x = \lambda^2 x \quad (**)$$

Gleichsetzen von \* und \*\*

$$\lambda x = \lambda^2 x$$

Dies ist nur erfüllt für  $\lambda = 1$  oder  $\lambda = 0$ .

Berechnung der  $[vvP] = v^T P v$  als Vorbereitung für die Fehlerrechnung:

- a) direkte Verwendung der  $v$  aus den Fehlergleichungen
- b) Ermittlung aus verschiedenen Kontrollformeln

b1)

$$v^T P v = -1^T P v$$

$$[vvP] = -[1vP]$$

Beweis:  $v^T P v = v^T P (Ax - 1) = \underbrace{v^T P Ax}_{=v} - \underbrace{v^T P 1}_{=0!}$

b2)

$$v^T P v = 1^T P 1 - x^T (A^T P 1)$$

$$[vvP] = [11P] - x_1 [a1P] - x_2 [b1P] - \dots - x_h [h1P]$$

Beweis:  $v^T P v = -1^T P v = -1^T P (Ax - 1) = 1^T P 1 - 1^T P Ax$

b3)

$$v^T P v = 1^T P 1 - (1^T P A) (A^T P A)^{-1} (A^T P 1)$$

$$[vvP] = [11P] - \{ [a1P]Q_{11} + [b1P]Q_{22} + \dots + [h1P]Q_{hh} \\ + 2[a1P][b1P]Q_{12} + \dots + 2[a1P][h1P]Q_{1h} \\ + \dots + 2[h_1 1P][h1P]Q_{h-1,h} \}$$

Beweis:  $v^T P v = 1^T P 1 - x^T (A^T P 1) = 1^T P 1 - 1^T P A (A^T P A)^{-1} (A^T P 1)$

$$x^T = 1^T P A (A^T P A)^{-1}$$

b4)  $[vvP] = [11P \cdot h]$  (**Mitreduktion im Normalgleichungssystem**)

Beweis: siehe „Lösung von Gleichungssystemen nach dem modernisierten Gaußschen Algorithmus“

**4.2.1 Zusammenstellung der linearen Beziehungen bei vermittelnden Beobachtungen**

	1	x	v	$\bar{l} = l+v$
1 1 =	E1			
2 x =	$[(A^T P A)^{-1} A^T P] l$	Ex		
3 v =	$[A(A^T P A)^{-1} A^T P - E] l =$ $= (A_0 - E) l$		Ev $[E - A(A^T P A)^{-1} A^T P] v =$ $= (E - A_0) v$	
4 $\bar{l} = l+v =$	$[A(A^T P A)^{-1} A^T P] l =$ $= A_0 l$	Ax		$E \bar{l}$ $A(A^T P A)^{-1} A^T P \bar{l} =$ $= A_0 \bar{l}$

Tabelle 4-1: lineare Beziehungen bei vermittelnden Beobachtungen

Bei unabhängigen Beobachtungen gleicher Genauigkeit:  $P \rightarrow E!$

**Weitere wichtige lineare Beziehungen und Definitionen:**

Nach (4.3) folgt für die **spezielle Einheitsmatrix** (extraordinary unit matrix) bei vermittelnden Beobachtungen:

$$A_0 = A(A^T P A)^{-1} A^T P$$

welche **singulär** und **idempotent** ist:

$$A_0 A = E A = A !$$

Es ist

$$(E - A_0) v = v$$

d.h.:

$$A_0 v = 0$$

Null ergibt sich für:

$$A_0 \bar{l} = \bar{l}$$

Also

$$(E - A_0) \bar{l} = 0$$

$$A_0 v = 0$$

Die  $v$  sind Eigenvektoren von  $(E-A_0)$ :

$$(E-A_0)\bar{l} = 0$$

Die  $\bar{l}$  sind Eigenvektoren von  $A_0$ :

$$A^T P v = 0$$

### 4.3 Ermittlung der Kofaktoren (=Gewichtsreziproken) von Größen, welche aus der Ausgleichung hervorgehen

#### 4.3.1 Vorbemerkungen:

Das Kapitel stellt die Anwendung des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz dar: gesucht sind die Kofaktorenmatrizen.

- $Q_{x,x}$  der Unbekannten  $x$
- $Q_{\bar{l}\bar{l}}$  der ausgeglichenen Beobachtungen  $\bar{l} = l+v$
- $Q_{v,v}$  der ausgeglichenen Verbesserungen

Dann ergeben sich die entsprechenden Kovarianzmatrizen  $C_{x,x}$ ,  $C_{\bar{l}\bar{l}}$ ,  $C_{v,v}$  durch Multiplikation mit  $m_0$  (woher  $m_0$  ??, noch nicht hergeleitet!)

Weg:

Die  $x$ ,  $\bar{l}$ ,  $v$  werden als (lineare) Funktionen der ursprünglichen Beobachtung ausgedrückt, dann wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet. Diese linearen Funktionen sind jedoch alle bereits in Tabelle 4-1 angeschrieben. Damit ergibt sich unmittelbar Tabelle 4-2.

	$l$	$x$	$v$	$\bar{l} = l+v$
$l$	$P^{-1} = Q_{l,l}$	$A(A^T P A)^{-1} = Q_{l,x}$	$A(A^T P A)^{-1} A^T - E = Q_{l,v}$	$A(A^T P A)^{-1} A^T = Q_{l,\bar{l}}$
$x$	$(A^T P A)^{-1} A^T = Q_{x,l} = Q_{x,x} A^T$	$(A^T P A)^{-1} = Q_{x,x}$	0 korrelations-frei!	$(A^T P A)^{-1} A^T = Q_{x,\bar{l}}$
$v$	$A(A^T P A)^{-1} A^T - E = Q_{v,l}$	0 korrelations-frei!	$P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T = Q_{v,v} = Q_{l,l} - Q_{\bar{l},\bar{l}} = (E-A_0)P^{-1}$	0 korrelations-frei!
$\bar{l} = l+v$	$A(A^T P A)^{-1} A^T = Q_{\bar{l},l} = Q_{\bar{l},\bar{l}}$	$A(A^T P A)^{-1} = Q_{\bar{l},x}$	0 korrelations-frei!	$A(A^T P A)^{-1} A^T = Q_{\bar{l},\bar{l}} = Q_{l,l} - Q_{v,v} = A_0 P^{-1}$

Tabelle 4-2: Kofaktoren bei vermittelnden Beobachtungen

Bei vermittelnden Beobachtungen:

$$A_0 = A(A^T P A)^{-1} A^T P$$

Bei Beobachtungen gleicher Genauigkeit:

$$P \text{ bzw. } P^{-1} \rightarrow E !$$

So ergeben sich z.B. die Kofaktoren der ausgeglichenen Beobachtungen

$$\bar{l} = l + v = [A(A^T P A)^{-1} A^T P] l = A_0 l \quad (4.20)$$

und nun entsprechend Fehlerfortpflanzung:

$$Q_{\bar{l}, \bar{l}} = A_0 P^{-1} A_0^T = [A(A^T P A)^{-1} A^T P] P^{-1} [P A(A^T P^{-1} A)^{-1} A^T] = A(A^T P A)^{-1} A^T$$

Man kann  $Q_{\bar{l}, \bar{l}}$  aber auch bilden, indem man die ausgeglichenen Beobachtungen als Funktionen der Unbekannten  $x$  auffasst:

$$\bar{l} = l + v = Ax$$

$$Q_{\bar{l}, \bar{l}} = A Q_{x,x} A^T = A(A^T P A)^{-1} A^T \quad (4.21)$$

### 4.3.2 Aufgabenstellung

Um das **Ausgleichungsergebnis beurteilen** zu können und um weiter das Ausgleichungsergebnis für Folgeberechnungen heranziehen zu können, benötigt man die mittleren Fehler von Unbekannten und ausgeglichenen Beobachtungen bzw. deren Kofaktoren. Beide sind durch die folgenden Gleichungen verknüpft:

$$m_{x_i}^2 = Q_{x_i, x_i} m_0^2 \quad (4.22)$$

$$m_{\bar{l}_i}^2 = Q_{\bar{l}_i, \bar{l}_i} m_0^2 \quad (4.23)$$

Die **Aufgabe** ist somit:

- Bestimmung der  $Q_{x_i, x_i} \equiv Q_{x,x}$  für die Unbekannten und der  $Q_{\bar{l}_i, \bar{l}_i} \equiv Q_{\bar{l}, \bar{l}}$  für die ausgeglichenen Beobachtungen
- Bestimmung von  $m_0$

### 4.4 Beweis der Formel $m_0 = \sqrt{[vvP]} / (n - h)$ für die vermittelnde Ausgleichung in der üblichen Darstellung

**Beobachtungsgleichungen:**

$$l + v = Ax \quad (4.24)$$

**Normalgleichungen:**

$$(A^T P A) x = A^T P l \quad (4.25)$$

**Lösung für die Unbekannten:**

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (4.26)$$

und

$$v = (A (A^T P A)^{-1} A^T P - E) \cdot l = (A_0 - E) \cdot l \quad (4.27)$$

mit

$$A_0 = A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (4.28)$$

Für später ermitteln wir noch die Spur von  $A$  und erhalten wegen:

$$\text{Spur}(XAY) = \text{Spur}(YXA)$$

unter Anwendung des Assoziativgesetzes der Matrizenmultiplikation sofort:

$$\text{Spur } A(A^T P A)^{-1} A^T P = \text{Spur} (A^T P A) (A^T P A)^{-1} = \text{Spur } E = h \quad (4.29)$$

bei regulärer Matrix  $(A^T P A)$ .

Dabei sei  $A$  eine  $(n,h)$ -Matrix, d.h. der Vektor  $x$  enthält  $h$  Unbekannte  $x_1, \dots, x_h$  und die Vektoren  $l$  und  $v$  enthalten  $n$  Beobachtungen  $l_1, \dots, l_n$  bzw.  $n$  Verbesserungen  $v_1, \dots, v_n$ .

$l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  ist ein Zufallsvektor mit den Elementen der Zufallsvariablen

- $l_1$  und den Realisierungen  $l_1^1, l_1^2, \dots, l_1^m$
- $l_2$  und den Realisierungen  $l_2^1, l_2^2, \dots, l_2^m$
- .....
- $l_n$  und den Realisierungen  $l_n^1, l_n^2, \dots, l_n^m$

Jedoch wird bei der praktischen Berechnung der vermittelnden Ausgleichung nur **eine** Realisierung der  $l_i$  verwendet. (Diese **eine** Realisierung ist möglicherweise **Mittelwert aus Wiederholungsbeobachtungen**).

Ebenfalls als bekannt angenommen wird die symmetrische (vollbesetzte) Gewichtsmatrix  $P = P_{ii}$  der (korrelierten) Beobachtungen  $l$ , die sich wie folgt schreiben lässt:

$$P_{ii} = Q_{ii}^{-1} = \sigma_0^2 C_{ii}^{-1} \quad (4.30)$$

Stellen wir uns das „Ausgleichungsexperiment“  $n$ -mal wiederholt und das Mittel gebildet vor, d.h. gehen wir zu den **Erwartungswerten** über, so gilt für die Beobachtungsgleichungen:

$$E(l) + \underbrace{E(v)}_{=0} = A \cdot E(x) \rightarrow E(l) = A \cdot E(x) \quad (4.31)$$

d.h. zu den Erwartungswerten der Beobachtungen gehören Erwartungswerte der Unbekannten, die mit dem überbestimmten Gleichungssystem verträglich sind.

Mit

$$E(l) = A E(x)$$

gilt auch

$$A^T P E(l) = (A^T P A) E(x)$$

und damit

$$E(x) = (A^T P A)^{-1} A^T P E(l)$$

$$\underbrace{A \cdot E(x)}_{E(l)} = \underbrace{A(A^T P A)^{-1} \cdot A^T P E(l)}_{A_0 \cdot E(l)} \quad (4.32)$$

Definieren wir nun analog zu oben **wahre Fehler**

$$E_q^i := l_q^i - E(l_q) \leftrightarrow l_q^i = E_q^i + E(l_q)$$

für die i-te Realisierung der zufälligen Beobachtung  $l_q$ .

So können wir für die aus **einmaliger** Realisierung ermittelten **Verbesserungen**  $v_i$  wegen (4.32) schreiben

$$v^i = (A_0 - E)l^i = (A_0 - E)(E^i + E(l)) = \underbrace{(A_0 - E) \cdot E(l)}_{=0} + (A_0 - E) \cdot E^i \quad (4.33)$$

Für die Summe  $v^T P v$  in der i-ten Realisierung gilt somit:

$$(v^i)^T P_{II} v^i = (E^i)^T (A_0^T - E) P_{II} (A_0 - E) (E^i)$$

und nach elementar und leicht durchzuführender Ausmultiplikation der rechten Seite:

$$(v^i)^T P_{II} v^i = ((E^i)^T P_{II} (E^i)) - ((E^i)^T P_{II} A_0 (E^i)) = (*) - (**) \quad (4.34)$$

Wir können beide quadratischen Formen (\*) und (\*\*) sofort in die Spuren dyadischer Vektorprodukte mit Matrizen umschreiben und bekommen für die i-te Realisierung des Experimentes:

$$(v^i)^T P_{II} v^i = \text{Spur} (E^i (E^i)^T P_{II}) - \text{Spur} (E^i (E^i)^T P_{II} A_0)$$

Nun haben wir alles vorbereitet, um in einem Schritt von der einmaligen Realisierung zur n-maligen Realisierung und Mittelwertbildung, d.h. zu den Erwartungswerten überzugehen.

Dabei werden insbesondere aus den Zufallsmatrizen  $(E^i (E^i)^T)$  ihre **Erwartungswerte**

$$E(v^T P v) = \text{Spur} (E(E E^T) P_{II}) - \text{Spur} (E(E E^T) P_{II} A_0) = \text{Spur}(C_{II}) - \text{Spur}(C_{II} A_0)$$

Und da

$$C_{II} = Q_{II} \sigma_0^2 = \sigma_0^2 P_{II}^{-1}$$

folgt:

$$\begin{aligned} E(v^T P v) &= \text{Spur}(\sigma_0^2 P_{II}^{-1} P_{II}) - \text{Spur}(\sigma_0^2 P_{II}^{-1} P_{II} A_0) \\ &= \sigma_0^2 \cdot \text{Spur}(E) - \sigma_0^2 \cdot \text{Spur}(A_0) = \sigma_0^2 \cdot (n - h) \end{aligned}$$

und damit für den **Varianzfaktor**:

$$\sigma_0^2 = \frac{E(v^T P v)}{n - h} \quad (4.35)$$

Dies ist aber genau das, was zu beweisen ist! Denn (4.35) besagt, dass sich der **Varianzfaktor**  $\sigma_0^2$  gerade als Erwartungswert der Funktion der Zufallsvariablen des bekannten Ausdrucks  $[v^T P v]/(n-h)$  ergibt. Dieser Aussage ist äquivalent, dass die Anwendung von (4.35) in der einmaligen Realisierung eines Ausgleichungsexperimentes eine unverzerrte Schätzung des Varianzfaktors (d.h. eine unverzerrte **Schätzung** des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit!) ergibt:

$$\sigma_0^2 = \frac{E(v^T P v)}{n - h}$$



$$m_0^2 = \frac{vPv}{n-h} \quad (4.36)$$

### 4.5 Herleitung von Gebrauchsformeln

Gegeben seien die **gegenseitig unabhängigen** Beobachtungen verschiedener Genauigkeit

- Beobachtungen  $l_1, \quad l_2, \quad \dots, l_n$
- mit den mittleren Fehlern  $m_1, \quad m_2, \quad \dots, m_n$
- bzw. den Gewichtseinheiten  $P_1 = \frac{m_0^2}{m_1^2}, \quad P_2 = \frac{m_0^2}{m_2^2}, \quad \dots, P_n = \frac{m_0^2}{m_n^2}$

wobei  $m_0$  = mittlerer Fehler der Gewichtseinheit ist.

Oder, gegeben seien die **gegenseitig abhängigen** Beobachtungen  $l_1, \dots, l_n$  mit ihren Varianzen und Kovarianzen, d.h. mit ihrer Kovarianzmatrix  $C_{ll}$  und daraus ihrer Kofaktorenmatrix  $Q_{ll} = 1/m_0^2 C_{ll}$ , dann erhält man als **Gewichtsmatrix**

bei **gegenseitig unabhängigen** Beobachtungen

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & P_n \end{pmatrix}$$

und bei **gegenseitig abhängigen** Beobachtungen

$$P = Q_{ll}^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ P_{n1} & \dots & & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Nach obiger Spezialisierung setzt man die **Verbesserungsgleichungen (Fehlergleichungen, Beobachtungsgleichungen)** nach dem Prinzip an:

$$\text{Beobachtung} + \text{Verbesserung} = f(\text{Unbekannte, Konstante})$$

in Matrizen

$$l + v = f(x) \quad (4.37)$$

wobei

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \end{pmatrix}, \quad n > h !$$

Die Gleichungen (4.37) seien nichtlinear, d.h. eine Darstellung der Art  $l + v = Ax$  (lineares Gleichungssystem) sei noch nicht möglich!

**Allgemeiner Lösungsansatz:**

Zu minimieren ist die quadratische Form

$$\Phi(x) = v^T P v \quad \text{mit} \quad v = f(x) - l$$

Dann muss gelten:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

d.h., die partiellen Ableitungen der quadratischen Form nach den Variablen  $x_1, \dots, x_h$  müssen alle zu Null werden:

$$\frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial x_1} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial x_h} = 0$$

$\implies$  h partielle Ableitungen  $\hat{=}$  h nichtlineare Gleichungen!

Anwendung der Produkt- und Kettenregel ergibt:

$$\frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{v}^T \mathbf{P} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (4.38)$$

Wegen

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}$$

gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

Also wird aus (4.38)

$$2\mathbf{v}^T \mathbf{P} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) = 2\mathbf{v}^T \mathbf{P} \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = 0$$

Dies ist gerade der Zeilenvektor der partiellen Ableitungen

$$\left( \frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial x_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial x_h} \right) = (0, 0, \dots, 0)$$

Damit aus dem Zeilen- ein Spaltenvektor wird, wird transponiert:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 0$$

Wegen  $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{P} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}) = 0 \quad (4.39)$$

Dies sind die **allgemeinen und nichtlinearen Bestimmungsgleichungen** zur Ermittlung der

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_h).$$

Die Gleichungen (4.39) heißen auch **Normalgleichungen**.

Ausführliche Darstellung der Gleichungen (4.39):

$$\text{Jakobimatrix: } \frac{\partial (\mathbf{f}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}}$$

Es war

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_h) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_h) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_h) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_h} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_h} \end{pmatrix}}_h \Bigg\}^n$$

**Wie können die nichtlinearen Gleichungen (4.39) gelöst werden?**

Man braucht immer Näherungswerte  $x_0$  derart, dass  $x = x_0 + \Delta x$ , und bestimmt dann (die) das  $\Delta x$  in einem Iterationsprozess aus linearen Einzelschritten.

Problem der numerischen Mathematik → häufig angewendete Prozedur: **Newton-Verfahren**

Ausgangsform:

$$g(x, l) = 0$$

Man wähle  $x_0$  und entwickle obige Gleichungen an der Stelle  $x_0$  in die **Taylor-Reihe 1. Ordnung**

$$x_0 \implies g(x_0, l) + \frac{\partial g(x_0, l)}{\partial x} \Delta x = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} g(x_0) + \frac{\partial g(x_0)}{\partial x} \Delta x &= 0 \\ \Delta x &= - \left( \frac{\partial g(x_0)}{\partial x} \right)^{-1} g(x_0) \\ x_1 &= x_0 + \Delta x \end{aligned}$$

Setze  $x_0 := x_1$  und starte oben erneut!

Anwendung auf (4.39):

$$g(x) \hat{=} \underbrace{\left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T}_P \quad \underbrace{(f(x) - l)}_{\text{In diesem Ausdruck nichtlineare x enthalten}} = 0$$

Bei der Anwendung des Newtonverfahrens benötigt man  $\frac{\partial g(x)}{\partial x} /_{x_0}$ , aber unter Anwendung der **Produktregel**. Die nichtlineare vermittelnde Ausgleichung ist schwierig!

(Literatur: SCHENK, MEYER, LINKWITZ / ZfV)

**4.6 In der Ausgleichung übliches Vorgehen**

Man betrachtet die  $x$  in  $\frac{\partial(f(x))}{\partial x}$ , also die in der Jakobimatrix stehenden  $x$  als Konstante.

Damit ist dann eine einfache Linearisierung von (4.39) möglich (bzw. Anwendung des Newton-Verfahrens).

$$x_1 : x_0 + \Delta x$$

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right)^T P (f(x_0) - l) + \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right)^T P \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right) \Delta x = 0$$

bzw. nach Umstellung

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right)^T P \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right)^T P (f(x_0) - l) = 0 \quad (4.40)$$

Nun setzt man

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right) = A \quad \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right)^T = A^T \quad (4.41)$$

und

$$f(x_0) - l = -\tilde{l} \quad (4.42)$$

und bekommt die **Normalgleichungen** (= 1. Schritt des Newton-Verfahrens!)

$$(A^T P A) \Delta x - A^T P \tilde{l} = 0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_0 = x_1$$

und starte erneut bis die  $x$  gegen eine feste Schranke konvergieren und die nichtlinearen Normalgleichungen (4.39) erfüllt sind.

Der oben geübten Vernachlässigung, dass man nämlich bei der Bildung von  $\frac{\partial g(x)}{\partial x}$  die Jakobimatrix  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  als **konstant** in den Unbekannten auffasst, ist äquivalent die übliche Linearisierung in der Ausgleichsrechnung.

In dieser werden nämlich bereits die Verbesserungsgleichungen linearisiert, d.h. die Bedingung  $v^T P v \implies \min$  wird bereits für **lineare Ausgangsgleichungen** angesetzt:

Nach (4.37) war  $l + v = f(x)$ ; nun Ansatz

$$x := x_0 + \Delta x$$

Dann wird aus (4.37)

$$l + v = f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right)}_{A} \cdot \Delta x$$

A nach (4.41)

Nach (4.42) ist  $l - f(x_0) = \tilde{l}$  und man bekommt die **linearen** Fehlergleichungen

$$v = A \cdot \Delta x - \tilde{l}$$

und man findet das Minimum der quadratischen Form

$$\Phi(x) = v^T P v$$

durch die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x} = \frac{\partial (v^T P v)}{\partial \Delta x} = 2v^T P \frac{\partial v}{\partial \Delta x} = 2v^T P A = 0 .$$

Nach Transponieren:

$$A^T P v = 0$$

$$v = A \Delta x - \tilde{l}$$

bekommt man

$$(A^T P A) \cdot \Delta x - A^T P \tilde{l} = 0 \quad (\hat{=} (4.42)!)$$

Sind schließlich die Fehlergleichungen von **vornherein** linear, dann ist eine lineare Darstellung der Form

$$f(x) = Ax$$

möglich, d.h

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = A \quad (\text{für jedes } x!)$$

Aus (4.39) folgt dann

$$A^T P (Ax - l) = 0 \quad \implies \quad (A^T P A) x - A^T P l = 0 \quad (4.43)$$

Führt man (zur numerischen Vereinfachung) auch im Fall der linearen Ausgangsgleichungen-Näherungswerte für die x ein:

$$x = x_0 + \Delta x$$

so erhält man aus (4.43) mit (4.41) gerade wieder (4.42). In diesem Sinne werden wir (4.42) und (4.43) **in der Form als äquivalent** betrachten.

**Berechnung der Verbesserungen:**

- Einsetzen der Unbekannten in die linearen bzw. linearisierten Fehlergleichungen

$$v = A \cdot x - l \quad \text{bzw.} \quad v = A \cdot \Delta x - \tilde{l}$$

- Prüfung auf Übereinstimmung mit den v, errechnet aus den nichtlinearen Fehlergleichungen

$$v = f(x) - l$$

- Kontrolle nach

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} A^T P v &= 0 \\ A^T P (f(x) - l) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ durchgreifende Kontrolle}$$

wobei

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \end{pmatrix}^T}_{\text{Jakobimatrix an der Stelle } x!!} P(f(x) - l) = 0$$

### 4.7 Arithmetisches Mittel mit Einführung eines Näherungswertes

**Beispiel 4.1:** Messung mit 5m - Latten und Zollstock

$l_i$ [m]	$\Delta l$ [mm]	+	v [mm]	-	$\Delta l^2$ [mm <sup>2</sup> ]	$v^2$ [mm <sup>2</sup> ]
20,316	+ 6			0,4	36	0,16
09	- 1	6,6			1	43,56
16	+ 6			0,4	36	0,16
13	+ 3	2,6			9	6,76
18	+ 8			2,4	64	5,76
18	+ 8			2,4	64	5,76
17	+ 7			1,4	49	1,96
18	+ 8			2,4	64	5,76
10	0	5,6			0	31,36
21	+11			5,4	121	29,16
	+56	14,8		14,8	444	130,40

Näherungswert  $x_0 = 20,310\text{m}$

$$l_i + v_i = x_0 + \Delta x = x ; \Delta l_i = l_i - x_0 ; x = l_i + v_i$$

$$v_i = + \Delta x - (l_i - x_0)$$

$$v_i = \Delta x - \Delta l_i$$

$$v = Ax - l$$

$$l \hat{=} \Delta l, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \hat{=} \Delta x$$

$$[vv] = \text{Min}$$

$$l^T l \Delta x = l^T \Delta l$$

$$n \Delta x - [\Delta l] = 0 \quad (\text{Normalgleichung})$$

$$x = \frac{[\Delta l]}{n} = \frac{+56}{10} = +5,6 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} v^T P v &= (x^T A^T - l^T) P (Ax - l) \\ &= x^T A^T P A x + l^T P l - l^T P A x - x^T A^T P l \\ &= l^T P l - x^T A^T P l \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} [vv] &= [\Delta l]^2 - \frac{[\Delta l]^2}{n} \\ [vv] &= [\Delta l]^2 - \Delta x \cdot [\Delta l] \end{aligned} \right\} \text{Pr oben für } [vv]$$

$$[vv] = 444 - 313,6 = 130,4$$

$$[vv] = 444 - 5,6 \cdot 56 = 130,4$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{130,4}{9}} = \pm 3,8 \text{ mm (mittlerer Fehler der einmal gemessenen Strecke)}$$

$$Q_{xx} = \frac{1}{1^T 1} = \frac{1}{10}$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{10}} = \pm 1,2 \text{ mm (mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels aus zehnmaliger Messung)}$$

$$x = (20,3156 \pm 0,0012) \text{ m}$$

#### 4.7.1 Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \dots + \frac{1}{n} l_n = \frac{[l]}{n}$$

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n$$

$$m_x^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_n^2 = \frac{m^2}{n}$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels von n unabhängigen Beobachtungen gleicher Genauigkeit:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (4.44)$$

Der mittlere Fehler nimmt bei der Mittelbildung nur mit der Wurzel aus der Anzahl n ab.

Für n = 100 ist

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} m$$

#### 4.7.2 Mittlerer Fehler einer Verbesserung

Anwendung der angegebenen Möglichkeiten für  $v_1$ :

$$F = v_1 = -l_1 + x$$

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \dots + \frac{1}{n} l_n$$

$$\text{mit } E(l_i) = \xi \text{ und } \sigma^2 = E\{(l_i - \xi)^2\}$$

Allgemein:

$$m_F^2 = m_{v_1}^2 = m_{l_1}^2 + m_x^2 - 2\text{COV}(l_1, x)$$

**1. Möglichkeit:**

$$L_1 = 1_1 + 0 \cdot 1_2 + \dots + 0 \cdot 1_n$$

$$x = \frac{1}{n} 1_1 + \frac{1}{n} 1_2 + \dots + \frac{1}{n} 1_n$$

$$\text{Cov}(1_1, x) = \frac{1}{n} \sigma^2$$

Da  $\sigma^2$  unbekannt ist, muss die Schätzung  $m^2$  benutzt werden. Schätzung der Kovarianz:

$$\text{Cov}(L_1, x) = \frac{1}{n} m^2$$

$$F = -1_1 + x \quad f^T = (-1, +1)$$

$$M = \begin{pmatrix} m^2 & \frac{m^2}{n} \\ \frac{m^2}{n} & \frac{m^2}{n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 & \frac{m^2}{n} \\ \frac{m^2}{n} & \frac{m^2}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$(-1 \quad +1) \begin{pmatrix} (-1 + \frac{1}{n})m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{n})m^2 \end{pmatrix}$$

$$m_F^2 = f^T M f = (1 - \frac{1}{n})m^2 = m_v^2 \tag{4.45}$$

**2. Möglichkeit:**

$$F = v_1 = -1_1 + \frac{1}{n} 1_1 + \frac{1}{n} 1_2 + \dots + \frac{1}{n} 1_n = \frac{1-n}{n} 1_1 + \frac{1}{n} 1_2 + \dots + \frac{1}{n} 1_n$$

$$m_F^2 = \frac{(1-n)^2}{n^2} m_1^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_n^2}_{n-1 \text{ Werte}}$$

$$m_1 = m_2 = \dots = m$$

$$m_F^2 = \left( \frac{(1-n)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \right) m^2 = \frac{1-2n+n^2+n-1}{n^2} m^2 = \frac{n^2-n}{n^2} m^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) m^2$$

$$m_F^2 = (1 - \frac{1}{n})m^2 = m_v^2 \tag{4.46}$$



### 4.7.3 Mittlerer Fehler aus gleichgewichtigen Beobachtungsdifferenzen, konstanter Fehleranteil

Es liegen paarweise Beobachtungen vor, die alle die gleiche Varianz  $\sigma^2$  und paarweise gleiche Erwartungswerte haben.

$$\begin{array}{ccccccc}
 l_{11} & l_{12} & d_1 = l_{12} - l_{11} & M_1 = \frac{l_{11} + l_{12}}{2} & \xi_1 & \sigma \\
 : & : & : & : & : & : \\
 : & : & : & : & : & : \\
 l_{n1} & l_{n2} & d_n = l_{n2} - l_{n1} & M_n = \frac{l_{n1} + l_{n2}}{2} & \xi_n & \sigma
 \end{array}$$

#### 1. Möglichkeit:

Erwartungswert:  $E(d) = \delta = 0$

$$m_d^2 = \frac{[(\delta - d_i)^2]}{n} = \frac{[d^2]}{n} \quad (\text{mittleres Fehlerquadrat einer Differenz } d_i)$$

$$m_d^2 = 2m^2 \rightarrow m^2 = \frac{m_d^2}{2} = \frac{[d^2]}{2n}$$

Mittlerer Fehler irgendeiner Beobachtung  $l_{i1}$  oder  $l_{i2}$ :

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \quad (4.47)$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels eines Beobachtungspaares:

$$\begin{aligned}
 M_i &= \frac{l_{i1} + l_{i2}}{2} \\
 m_{M_i} &= \frac{m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}} \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

#### 2. Möglichkeit:

Erwartungswert:  $E(d) = \delta \neq 0$

Eine Schätzung für den Erwartungswert  $\delta$  ist das arithmetische Mittel:

$$d_m = \frac{[d]}{n}$$

In der Regel ist  $d_m \neq 0$ .

Ursache: zufällige Messungenauigkeiten oder Modellfehler

Annahme: Die  $d_i$  enthalten alle einen konstanten Fehleranteil.

$$\begin{aligned}
 d_i + v_i &= d_m \\
 v_i &= d_m - d_i
 \end{aligned}$$

$$[vv] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n} \quad (\Delta l_i \rightarrow d_i ; \Delta x \rightarrow d_m)$$

$$m'_d = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[d^2] - \frac{[d]^2}{n}}{n-1}} \quad (\text{entspricht } \pm m_d)$$

$$m' = \sqrt{\frac{[vv]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{[d^2] - \frac{[d]^2}{n}}{2(n-1)}} \quad (\text{entspricht } \pm m)$$

$$m'_{M_i} = \frac{m'}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2] - \frac{[d]^2}{n}}{4(n-1)}} \quad (\text{entspricht } \pm m_{Mi})$$

Neu hinzu kommt der mittlere Fehler  $m'_{dm}$  des arithmetischen Mittels  $d_m$  des konstanten Fehleranteils:

$$m'_{d_m} = \frac{m'_d}{\sqrt{n}}$$

Kriterium für die Möglichkeit des Vorhandenseins eines konstanten Anteils:

$$d_m \geq m'_{dm}$$

$$d_m^2 \geq m'^2_{dm}$$

$$\frac{[d]^2}{n^2} \geq \frac{1}{n(n-1)} \left( [d^2] - \frac{[d]^2}{n} \right)$$

$$(n-1)[d]^2 \geq n[d^2] - [d]^2$$

$$[d]^2 \geq [d^2]$$

Erst für  $[d]^2 > [d^2]$  lohnen sich Überlegungen, ob ein konstanter systematischer Fehleranteil in den Beobachtungspaaren vorhanden sein könnte.

Die Forderung  $m' \leq m$  führt zur gleichen Bedingung. Die Bedingung gilt auch für wahre Fehler  $E$ , versagte aber wegen  $[v] = 0$  bei Verbesserungen.

**Beispiel 4.2:**

Berechnung mittlerer Fehler aus gleichgewichtigen Beobachtungsdifferenzen **ohne** systematischen Anteil

Messung von Polygonwinkeln

Nr. i	Satz 1 $l_{i1}$	Satz 2 $l_{i2}$	d $l_{i2} - l_{i1}$
	g	g	cc
1	198,2436	198,2461	+ 25
2	201,1638	201,1642	+ 4
3	187,7878	187,7866	- 12
4	199,3586	199,3578	- 8
5	221,6391	221,6407	+ 16
6	206,4356	206,4338	- 18
7	191,2445	191,2445	$\pm 0$
8	175,3008	175,2978	- 30
9	230,5384	230,5372	- 12
10	187,4638	187,4664	+ 26
$\Sigma$	1999,1760	1999,1751	[d] = - 9 [d] <sup>2</sup> = 81 < [d <sup>2</sup> ]

Schätzung für einen eventuellen konstanten systematischen Anteil:

$$\frac{[d]}{n} = -0,9^{cc}$$

Mittlerer Fehler eines einmal gemessenen Polygonwinkels:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{3149}{2 \cdot 10}} = \pm 13^{cc}$$

Mittlerer Fehler für das Mittel aus 2 gemessenen Polygonwinkeln:

$$m_{M_i} = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{4n}} = \pm \sqrt{\frac{3149}{4 \cdot 10}} = \pm 9^{cc}$$

**Beispiel 4.3:**

Berechnung mittlerer Fehler aus gleichgewichtigen Beobachtungsdifferenzen mit konstantem systematischen Anteil:

Längenmessung mit Stahlbändern

1. Messung bei heißem, sonnigem Wetter ( $t \approx 30^\circ$ )

2. Messung bei kühlem, regnerischem Wetter ( $t \approx 15^\circ$ )

Nr.	1. Messung	2. Messung	$d_j$	$v_i$
	$l_{i1}$	$l_{i2}$	$l_{i2} - l_{i1}$	$d_m - d_i$
	m	m	mm	mm
1	141,367	141,399	+ 32	- 8
2	168,439	168,449	+ 10	+ 14
3	163,672	163,692	+ 20	+ 4
4	144,458	144,493	+ 35	- 11
5	168,123	168,160	+ 37	- 13
6	154,345	154,368	+ 23	+ 1
7	142,463	142,491	+ 28	- 4
8	164,768	164,776	+ 8	+ 16
9	168,946	168,967	+ 21	+ 3
$\Sigma$	1416,581	1416,795	$[d] = + 214$	$[v] = + 2$

$$[d]^2 = 45796 ; \quad [dd] = 5936 \quad \text{also} \quad [d]^2 > [dd]$$

Schätzung für den systematischen Anteil:

$$d_m = \frac{[d]}{n} = \frac{+214}{9} = +24\text{mm}$$

$$[vv] = 848 \quad \text{Probe:} \quad [vv] = [dd] - \frac{[d]^2}{n} = 5936 - 5088 = 848$$

Mittlerer Fehler einer Differenz:

$$m'_d = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 10\text{mm}$$

mittlerer Fehler des konstanten systematischen Anteils  $d_m$ :

$$m'_{d_m} = \pm \frac{m'_d}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \pm 3\text{mm}$$

Mittlerer zufälliger Fehler einer einmal gemessenen Strecke:

$$m' = \frac{m'_d}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{2(n-1)}} = \pm 7\text{mm}$$

Mittlerer zufälliger Fehler eines Mittels aus beiden Messungen:

$$m'_M = \frac{m'}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}} = \pm 5\text{mm}$$

### 4.8 Beispiel zum allgemeinen arithmetischen Mittel mit Einführung eines Näherungswertes

Die Höhe eines Punktes P wurde durch Nivellement von 6 verschiedenen Höhenfestpunkten aus bestimmt. Es sind die Höhe des Punktes P und ihr mittlerer Fehler sowie der mittlere km-Fehler des Nivellements zu berechnen.

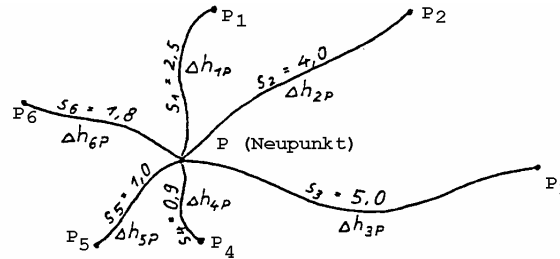


Abbildung 4.1: Nivellement

$$H_P = H_j + \Delta h_{jP}$$

Die Höhen der Festpunkte  $H_j$  sind fehlerfrei.

Annahmen:

- Nur zufällige unabhängige Fehler,  $\pm m$  für einen Stand (keine Abhängigkeit von  $\Delta h$ )
- Zielweiten  $\approx$  gleich lang

Mittlerer Fehler des Höhenunterschiedes für einen Nivellementsweg  $s$ :

$$m_s^2 = n m^2$$

mit

$$n = \frac{s}{2Z} \quad (Z = \text{mittlere Zielweite})$$

$$m_s^2 = \frac{s}{2Z} m^2$$

Mit dem mittleren Fehler des Höhenunterschiedes für einen konstanten Nivellementsweg  $s_0$

$$m_0^2 = \frac{s_0}{2Z} m^2$$

wird

$$m_s^2 = m_0^2 \frac{s}{s_0}$$

2. Fall ist hier

$$F_i = \frac{s_i}{s_0}$$

Gewichtsansatz für  $\Delta h_{jp}$ :

$$P_s = \frac{m_0^2}{m_s^2} = \frac{s_0}{s}$$

Wird  $s_0$  gleich der Längeneinheit von  $s$  (z.B. km) gewählt, so ist  $m_0$  der mittlere Fehler des Höhenunterschiedes bei einem Nivellementsweg, der gleich der Längeneinheit ist, z.B. mittlerer km-Fehler, wenn der Gewichtsansatz

$$P_s = \frac{1}{s[\text{km}]}$$

benutzt wird.

Zug	$H_j$	$\Delta h_{jp}$	Höhe von P	s	$\Delta l$	$p = \frac{1}{s}$	$p\Delta l$	v	pv	pvv
	m		m	km	mm			mm	mm	mm <sup>2</sup>
					+		+			
1	49,048	+1,266	50,314	2,5	14	0,4	5,6	-0,4	-0,16	0,064
2	51,171	-0,864	307	4,0	7	0,2	1,4	+6,6	+1,32	8,712
3	47,398	+2,904	302	5,0	2	0,2	0,4	+11,6	+2,32	26,912
4	50,421	-0,104	317	0,9	17	1,1	18,7	-3,4	-3,74	12,716
5	50,876	-0,560	316	1,0	16	1,0	16,0	-2,4	-2,40	5,760
6	50,002	+0,307	309	1,8	9	0,6	5,4	+4,6	+2,76	12,696
					[ ]	3,5	+47,5		+0,10	56,860

Näherungswert  $x_0 = 50,300$  m

$$x = \frac{[p\Delta l]}{[p]} = \frac{+47,5}{3,5} = +13,57\text{mm}$$

$$H_p = x_0 + \Delta x = 50,300 + 0,014 = 50,314 \text{ m}$$

Probe:

$$[pv] = „0“ = +0,10$$

$$[pvv] = 66,860 \text{ (direkt berechnet)}$$

Proben:

$$[pvv] = [p\Delta l\Delta l] - \frac{[\Delta l p]^2}{[p]} = 711,500 - \frac{47,5^2}{3,5} = 66,857$$

$$[pvv] = [p\Delta l\Delta l] - [p\Delta l] \Delta x = 711,500 - 47,5 \cdot 13,57 = 66,925$$

Fehlerrechnung:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{66,86}{6-1}} = \pm 3,7 \text{ mm (für } s = 1 \text{ km)}$$

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p] \cdot (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{66,86}{3,5 \cdot (6-1)}} = \pm 2,0 \text{ mm}$$

Schlussergebnis:

$$H_p = (50,314 \pm 0,002) \text{ m}$$

Der mittlere km-Fehler des Nivellements beträgt  $\pm 3,7$  mm.

## 4.9 Einige Beispiele für das Aufstellen der Fehlergleichungen

### 4.9.1 Beispiel: Winkelmessung

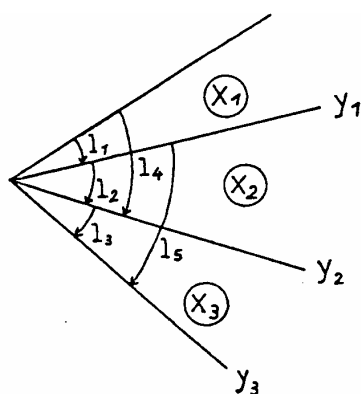


Abbildung 4.2: Winkelmessung

#### Fall 1:

$$l_1 + v_1 = x_1 \quad ; p_1$$

$$l_2 + v_2 = x_2 \quad ; p_2$$

$$l_3 + v_3 = x_3 \quad ; p_3$$

$$l_4 + v_4 = x_1 + x_2 \quad ; p_4$$

$$l_5 + v_5 = x_2 + x_3 \quad ; p_5$$

#### Fall 2:

$$l_1 + v_1 = y_1 \quad ; p_1$$

$$l_2 + v_2 = -y_1 + y_2 \quad ; p_2$$

$$l_3 + v_3 = -y_2 + y_3 \quad ; p_3$$

$$l_4 + v_4 = +y_2 \quad ; p_4$$

$$l_5 + v_5 = -y_1 + y_3 \quad ; p_5$$

- Jede Beobachtung ergibt eine Fehlergleichung.
- Die Unbekannten müssen linear unabhängig sein. Diese Forderung bedeutet, dass nur die notwendige Anzahl von Unbekannten angesetzt werden darf.
- Die Wahl der Unbekannten ist an sich beliebig, aber nicht jede Wahl ist zweckmäßig.

Normalgleichungen Fall 1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Normalgleichungen Fall 2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da  $y_1 = x_1$  ist, muss  $(A_1^T A_1)_{1,1}^{-1} = (A_2^T A_2)_{1,1}^{-1}$  sein.

Probe durch Nachrechnen!

### 4.9.2 Beispiel: Richtungen und Strecken

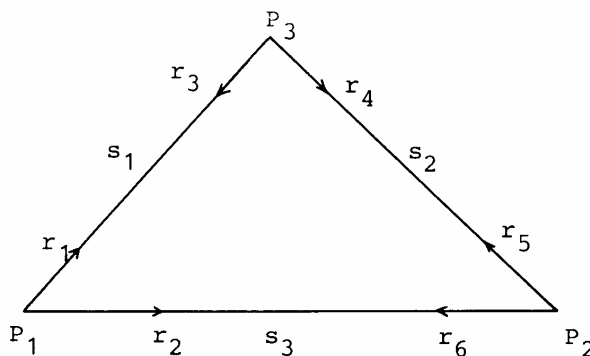


Abbildung 4.3: Richtungen und Strecken

Beobachtungen:

Richtungen  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$

Strecken  $s_1, s_2, s_3$

Unbekannte:

z.B:  $\bar{s}_1 = x_1$

$\bar{s}_2 = x_2$

$\bar{r}_1 = x_3$

$\bar{r}_2 = x_4$

$\bar{r}_3 = x_5$

$\bar{r}_5 = x_6$

Vorteile: Unbekannte sind direkte Beobachtungen, gute Näherungswerte bei Linearisierung

Nachteil: komplizierte Funktionen der Unbekannten treten auf

Andere Wahl:

- Koordinaten von  $P_1, P_2, P_3$
- Willkürliche Festlegung:  $x_1, y_1, w_1 = \text{konst.}$
- Unbekannte dann:  $x_2, y_2, w_2, x_3, y_3, w_3 = 6$  Parameter



### 4.10 $m_0$ = Berechnung für eine Beobachtung der Ausgleichung

$v^T P v$ -Kontrolle:

$$v = Ax - l \quad ; \quad A^T P Ax = A^T P l$$

$$v^T P v = (x^T A^T - 1^T) P (Ax - l) = x^T A^T P Ax - 1^T P Ax - x^T A^T P l + 1^T P l$$

$$v^T P v = 1^T P l - x^T A^T P l$$

mit

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad \rightarrow \quad 1^T P l - 1^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P l = 1^T (P - P A (A^T P A)^{-1} A^T P) l$$

folgt

$$v^T P v = 1^T P (E - A_0) l$$

und mit

$$A_0 = A (A^T P A)^{-1} A^T P$$

Folgt

$$v_i = (A_0 - E)_{ii} l_i = (A_0 - E)_{ii} E_i$$

$$v_i^2 p_i = E_i^2 p_i r_i \quad (\text{mit } r_i = \text{Diag}(E - A_0)_{ii})$$

$$E(E_i^2) = m_i^2 = \frac{v_i^2 p_i}{p_i r_i}$$

$$m_0^2 p_0 = m_i^2 p_i$$

$$m_0^2 = \frac{v_i^2 p_i}{r_i}$$

$m_0^2$  = Varianz der Gewichtseinheit, abgeleitet für eine Beobachtung  $i$  aus  $v_i$

$$v_i = (A_0 - E)_{ii} E_i$$

$$v_i = -r_i E_i \quad (\text{gilt auch für groben Fehler } \nabla l)$$

$$v_i = -r_i \nabla l_i$$

Annahme

$$\nabla l_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nabla l_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eine Beobachtung grob falsch})$$

$m_0^2$  als Funktion von  $\nabla l_i$ :

$$m_0^2 = \frac{\nabla l_i^2 r_i^2 p_i}{r_i} = r_i p_i \nabla l_i^2$$

Bei bekanntem  $m_0$ :

$$\nabla l_i^2 = \frac{m_0^2}{r_i p_i} \quad \rightarrow \quad \nabla l_i = \frac{m_0}{\sqrt{r_i p_i}}$$

Übergang zu  $m_0^2$  der Gesamtausgleichung:

$$m_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} \quad (\text{r Gesamtredundanz})$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i^2 p_i \quad (\text{bei P Diagonalmatrix})$$

Damit:

$$r \cdot m_0^2 = \sum_{i=1}^n r_i m_{0i}^2$$

$$m_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n r_i m_{0i}^2}{r} \quad (4.49)$$

$m_0^2$  ist gewichtetes arithmetisches Mittel der  $m_{0i}^2$ , mit den Gewichten  $r_i$ , da

$$\sum_{i=1}^n r_i = r$$

## 5 Rechentechnische Probleme bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

### 5.1 Beispiel: Nivellementsnetz

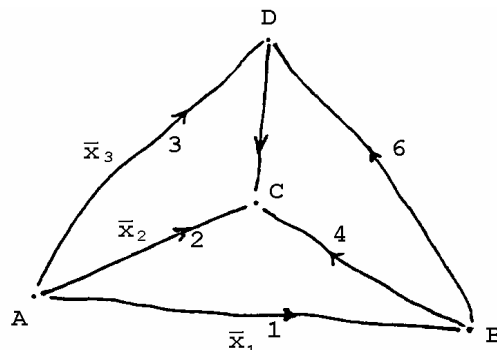


Abbildung 5.1: Nivellementsnetz

#### Aufgabe:

Die Höhen der Punkte B, C und D über A, die zugehörigen mittleren Fehler sowie der ausgeglichene Höhenunterschied  $H_C - H_D$  mit mittlerem Fehler sind zu bestimmen.

Beobachtungsergebnisse:

$h_1$	=	1,015	m	$s_1$	=	6,25	km
$h_2$	=	12,570	m	$s_2$	=	4,70	km
$h_3$	=	6,161	m	$s_3$	=	7,15	km
$h_4$	=	11,563	m	$s_4$	=	3,95	km
$h_5$	=	6,414	m	$s_5$	=	4,25	km
$h_6$	=	5,139	m	$s_6$	=	5,50	km

#### Aufstellen der ursprünglichen Fehlergleichungen

a) Unbekannte seien die ausgeglichenen Höhenunterschiede

$$\bar{x}_1 = \bar{h}_1 = \text{Höhe von B über A}$$

$$\bar{x}_2 = \bar{h}_2 = \text{Höhe von C über A}$$

$$\bar{x}_3 = \bar{h}_3 = \text{Höhe von D über A}$$

b) Ausdrücken der Beobachtungen durch die Unbekannten

$h_1$	+	$v_1$	=	+	$\bar{x}_1$	$p_1$	=	1,6			
$h_2$	+	$v_2$	=		+	$\bar{x}_2$	$p_2$	=	2,1		
$h_3$	+	$v_3$	=			+	$\bar{x}_3$	$p_3$	=	1,4	
$h_4$	+	$v_4$	=	+	$\bar{x}_1$	+	$\bar{x}_2$	$p_4$	=	2,5	
$h_5$	+	$v_5$	=		+	$\bar{x}_2$	-	$\bar{x}_3$	$p_5$	=	2,4
$h_6$	+	$v_6$	=	-	$\bar{x}_1$		+	$\bar{x}_3$	$p_6$	=	1,8
l	+	v	=	Ax				p			

Die Gewichte errechnen sich nach

$$p_i = \frac{10[\text{km}]}{s_i[\text{km}]}$$

$m_0$  = mittlerer Fehler für 10 km Nivellementsweg

**Einführung von Näherungswerten:**

a) Als Näherungswerte für  $x_1, x_2$  und  $x_3$  werden  $x_1^0 = h_1, x_2^0 = h_2$  und  $x_3^0 = h_3$  benutzt.

$$\bar{x}_1 = h_1 + x_1 = x_1^0 + x_1$$

$$\bar{x}_2 = h_2 + x_2 = x_2^0 + x_2$$

$$\bar{x}_3 = h_3 + x_3 = x_3^0 + x_3$$

$$\bar{x} = x^0 + x$$

b) Aufstellen der Fehlergleichungen mit Näherungswerten

$$\begin{aligned} v_1 &= +x_1 && + (x_1^0 - h_1) \\ v_2 &= +x_2 && + (x_2^0 - h_2) \\ v_3 &= +x_3 && + (x_3^0 - h_3) \\ v_4 &= -x_1 + x_2 && + (-x_1^0 + x_2^0 - h_4) \\ v_5 &= +x_2 - x_3 && + (+x_2^0 - x_3^0 - h_5) \\ v_6 &= -x_1 + x_3 && + \underbrace{(-x_1^0 + x_3^0 - h_6)}_{-l_i} \end{aligned}$$

$$v = Ax + Ax^0 - l$$

$$v = Ax - \underbrace{(l - Ax^0)}_1$$

$$v = Ax - l \tag{5.1}$$

Umgeformte Fehlergleichungen in Matrizen:

+1			0	-1	1,6
	+1		0	-1	2,1
		+1	0	-1	1,4
-1	+1		-8	+8	2,5
	+1	-1	-5	+5	2,4
-1		+1	+7	-7	1,8
A			-l [mm]	s	Diagonal- glieder von P

## 5.2 Aufstellen der Normalgleichungen

$$(A^T P A)x - A^T P l = 0 \quad (5.2)$$

$$A^T P A = \begin{pmatrix} 5,9 & -2,5 & -1,8 \\ -2,5 & 7,0 & -2,4 \\ -1,8 & -2,4 & 5,6 \end{pmatrix} \quad A^T P l = \begin{pmatrix} -7,4 \\ +32,0 \\ -24,6 \end{pmatrix}$$

$$1^T P l = 308,2$$

## 5.3 Berechnung der Unbekannten; Gaußscher Algorithmus

Normalgleichungen:

$$N x - A^T P l = 0 \quad (5.3)$$

(ein Gleichungssystem, u - Unbekannte)

Gleichungssysteme zur Bestimmung der Gewichtskoeffizienten (**Invertierung der Normalgleichungsmatrix**):

$$N Q - E = 0 \quad (u \text{ Gleichungssysteme, } u^2 \text{ Unbekannte})$$

Überführung durch Multiplikation mit einer Reduktionsmatrix in:

$$R N x - R A^T P l = 0$$

$$R N Q - R = 0$$

Wenn RN eine obere Dreiecksmatrix ist, so ergeben sich die Unbekannten x und Q durch rückwärtiges Einsetzen.

**Inversion:** (Gaußscher Algorithmus)

$$N x = A^T P l$$

Multiplikation mit Reduktionsmatrix R

$$R N x = R A^T P l$$

Damit Überführen in eine obere Dreiecksmatrix.

Dann rückwärtiges Einsetzen zur Bestimmung von  $x_h \dots x_1$

Oder: **Kramersche Regel**

$$(A^T P A)^{-1} = Q_{xx} = \begin{pmatrix} 0,283 & 0,155 & 0,158 \\ & 0,252 & 0,158 \\ & & 0,297 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1,0 \\ +3,0 \\ -3,4 \end{pmatrix} [\text{mm}]$$

### 5.4 Proben, [pvv] aus den Fehlergleichungen, mittlere Fehler, Schlußergebnis

$$v = Ax - l \tag{5.1}$$

v	$a_i x_1$	$b_i x_2$	$c_i x_3$	$-l_i$ [mm]	$v_i$ [mm]	$p_i$	pvv
1	-1,01			0	-1,0	1,6	1,63
2		+3,04		0	+3,0	2,1	19,41
3			-3,41	0	-3,4	1,4	16,28
4	+1,01	+3,04		-8	-3,9	2,5	39,00
5		+3,04	+3,41	-5	+1,4	2,4	5,05
6	+1,01		-3,41	+7	+4,6	1,8	38,09

$$[pvv] = 119,46$$

$$\text{aus Algorithmus} = 119,46$$

$A^T P v$  – Proben:

$$[pav] = -1,62 + 9,88 - 8,28 = -0,02$$

$$[pbv] = +6,38 - 9,88 + 3,48 = -0,02$$

$$[pcv] = -4,77 - 3,48 + 8,28 = +0,03$$

Rechentechnisch günstiger ist es, diese Tabelle mit der Tabelle der umgeformten Fehlergleichungen zusammenzufassen.

Berechnung der endgültigen Unbekannten:

i	$x_i^0$ [m]	$x_i$ [mm]	$\bar{x}_i$ [m]
1	1,015	-1,0	1,0140
2	12,570	3,0	12,5730
3	6,161	-3,4	6,1576

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler  $m_0$ :

$m_0$  bezieht sich auf ein Nivellement von 10 km Länge.

$$\left( \text{Gewichtsansatz } p_i = \frac{s_0[\text{km}]}{s_i[\text{km}]} = \frac{10[\text{km}]}{s_i[\text{km}]} \right)$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n - u}} = \pm \sqrt{\frac{119,46}{6 - 3}} = \pm 6,3\text{mm}$$

Mittlerer Kilometerfehler:

$$m = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p}} \tag{5.4}$$

mit

$$p = \frac{10}{s_i[\text{km}]}$$

und  $s_i = 1$  km ergibt sich der mittlere Fehler für ein Nivellement von 1 km Länge

$$m = \pm \frac{m_0}{\sqrt{10}} = \pm 2,0\text{mm}$$

Mittlerer Fehler der Unbekannten:

$$m_{x_i} = m_0 \cdot \sqrt{Q_{ii}}$$

$$m_{x_1} = m_0 \cdot \sqrt{Q_{11}} = \pm 6,3 \cdot \sqrt{0,2833} = \pm 3,4\text{mm}$$

$$m_{x_2} = m_0 \cdot \sqrt{Q_{22}} = \pm 6,3 \cdot \sqrt{0,2525} = \pm 3,2\text{mm}$$

$$m_{x_3} = m_0 \cdot \sqrt{Q_{33}} = \pm 6,3 \cdot \sqrt{0,2970} = \pm 3,4\text{mm}$$

Schlussergebnis:

$$H_B = (1,014_0 \pm 0,003_4) \text{ m über } H_A$$

$$H_C = (12,573_0 \pm 0,003_2) \text{ m über } H_A$$

$$H_D = (6,157_6 \pm 0,003_4) \text{ m über } H_A$$

### 5.5 Mittlerer Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Werte

$$H_C - H_D = x_2 - x_3 = 12,5730 - 6,1576 = 6,4154 \pm ?$$

$$F = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3$$

$$Q_{FF} = f_1^2 Q_{11} + 2f_1 f_2 Q_{12} + 2f_1 f_3 Q_{13} \\ + f_2^2 Q_{22} + 2f_2 f_3 Q_{23} \\ + f_3^2 Q_{33}$$

Hier:

$$Q_{FF} = 1 \cdot Q_{22} - 2 \cdot Q_{23} + 1 \cdot Q_{33} \\ Q_{FF} = 0,2525 - 2 \cdot (+0,1581) + 0,2970 = +0,2333$$

$$m_F = \pm m_0 \cdot \sqrt{Q_{FF}} = \pm 6,3 \cdot \sqrt{0,2333} = \pm 3,0\text{mm}$$

$$H_C - H_D = (6,4154 \pm 0,003)\text{m}$$

Berechnung der mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtung:

$$l + v = \tilde{l} = Ax \tag{5.5}$$

$$Q_{ll} = A Q_{xx} A$$

$$Q_{xx} \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$A_0 = Q_{11}P$$

$$\text{Diag}(A_0) = ?$$

### 5.6 Normalgleichungen aus Anteilen der Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1x - l_1 & P_1 \\ v_2 &= A_2x - l_2 & P_2 \end{aligned}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}$$

Bildung der Normalgleichungen:

$$(A^T P A)x = A^T P l$$

In Untermatrizen:

$$\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 \\ A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 \end{pmatrix}$$

Damit Normalgleichungen:

$$(A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2) x = A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2$$

Allgemein aus:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1x - l_1 & P_1 \\ &\vdots & \\ &\vdots & \\ v_i &= A_ix - l_i & P_i \end{aligned}$$

Normalgleichung:

$$\sum_{k=1}^i A_k^T P_k A_k x = \sum_{k=1}^i A_k^T P_k l_k \tag{5.6}$$



## 5.7 Zusammenfassung von Beobachtungen

### 5.7.1 Mehrfache Messung der gleichen Größe

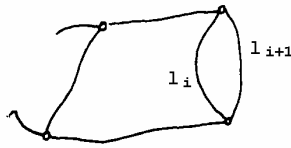


Abbildung 5.2: Mehrfache Messung der gleichen Größe

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 - l_i \quad ; p_i$$

$$v_{i+1} = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 - l_{i+1} \quad ; p_{i+1}$$

Das allgemeine arithmetische Mittel der Beobachtungen wird als abgeleitete Beobachtung in die Fehlergleichungen eingeführt.

$$V = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 - \frac{(p_i l_i + p_{i+1} l_{i+1})}{(p_i + p_{i+1})} \quad (5.7)$$

$$p = p_i + p_{i+1}$$

Anteile in den Normalgleichungskoeffizienten:

aus den Fehlergleichungen  $v_i$  und  $v_{i+1}$  aus der Fehlergleichung  $V$

$$a_i^2 \cdot (p_i + p_{i+1}) = a_i^2 \cdot (p_i + p_{i+1})$$

$$a_i b_i \cdot (p_i + p_{i+1}) = a_i b_i \cdot (p_i + p_{i+1})$$

$$a_i \cdot (p_i l_i + p_{i+1} l_{i+1}) = a_i \cdot (p_i l_i + p_{i+1} l_{i+1})$$

**Aber!**

$$p_i l_i^2 + p_{i+1} l_{i+1}^2 \neq \frac{(p_i l_i + p_{i+1} l_{i+1})^2}{(p_i + p_{i+1})}$$

Freiheitsgrade:  $n - u \quad (n - 1) - u$

Das System der  $V$  ist dem System der  $v$  äquivalent für die Berechnung der Unbekannten.

Für die Summe  $[pvv]$  ist es jedoch nicht äquivalent. Es ergibt sich eine andere Schätzung für  $\sigma_0^2$ .

Wenn die Modellfehler gegenüber den zufälligen Fehlern klein sind, ist die Schätzung für  $\sigma_0^2$  mit der größeren Anzahl von Freiheitsgraden repräsentativer.

### 5.7.2 Zusammenfassung von Messungen verschiedener Größen zur Elimination einer nicht überbestimmten Unbekannten

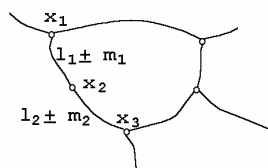


Abbildung 5.3: Überbestimmte Unbekannte

$$\begin{aligned} v_1 &= -a_1 x_1 + b_1 x_2 - l_1 && ; p_1 \\ v_2 &= -b_2 x_2 + c_2 x_3 - l_2 && ; p_2 \end{aligned}$$

Zusammenfassung durch Addition der beiden Fehlergleichungen:

$$v_{1+2} = -a_1 x_1 + c_2 x_3 - (l_1 + l_2) ; p_{1+2} = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}}$$

Das Gewicht der Fehlergleichung  $v_{1+2}$  ergibt sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

$$F = l_1 + l_2 \quad \frac{1}{p_i} = q_i ; \quad m_i^2 = m_0^2 q_i$$

$$m_F^2 = m_1^2 + m_2^2 = m_0^2 \cdot m_1^2 = m_0^2 \cdot (q_1 + q_2) = m_0^2 \cdot \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)$$

$$m_F^2 = m_0^2 \cdot \frac{1}{p_F}$$

Gewichtsreziproke:

$$\frac{1}{p_F} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \left[ \frac{1}{p} \right] \quad q_F = q_1 + q_2$$

Gewicht von  $F = l_1 + l_2$ :

$$p_F = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} = \left[ \frac{1}{p} \right] \quad q_F = \frac{1}{q_1 + q_2} \quad (5.8)$$

(Beweis durch Nachrechnen und Koeffizientenvergleiche der Normalgleichungsanteile.)

## 5.8 Verfahren zur partiellen Elimination von Unbekannten

### 5.8.1 Vorbemerkungen

Bei manchen Aufgaben der Ausgleichsrechnung ist es zweckmäßig, aus den Fehlergleichungen (oder aus einer Untergruppe der Fehlergleichungen) eine Unbekannte vorweg zu eliminieren. In der Vorlesung werden dazu zwei Rechenverfahren angegeben, nämlich:

- das Eliminationsverfahren nach Schreiber,
- das Verfahren der reduzierten Fehlergleichungen.

### 5.8.2 Das Eliminationsverfahren nach Schreiber

Wir gehen aus von einer Gruppe bzw. Untergruppe von Fehlergleichungen bezüglich ungleichgewichtiger Beobachtungen bei beliebigen Koeffizienten der Fehlergleichungsmatrix.

$$v_g = A_g x_g - l_g \quad (5.9)$$

Dabei ist

$$v_g = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad A_g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} \quad l_g = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad x_g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x \end{pmatrix}$$

a            A

a ist der Koeffizientenvektor der zu eliminierenden Unbekannten  $x_1$ , A ist die Koeffizientenmatrix der übrigen Unbekannten x.

Es liege die Gewichtsmatrix  $P_g$  vor mit:

$$P_g = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix}$$

Durch die Aufspaltung der Matrix  $A_g$  und des Vektors  $x_g$  ergeben sich die Fehlergleichungen zu:

$$v_g = a x_1 + A x - l_g \quad (5.10)$$

Einführen der Schreiberschen Verbesserungen  $v_s$ :

$$v_g - a x_1 =: v_s = A x - l_g \quad (5.11)$$

Die Schreibersche Gleichung erhält man durch linksseitige Multiplikation von (5.11) mit  $a^T P_g$ :

$$a^T P_g v_g - a^T P_g a x_1 =: v_s^* = a^T P_g A x - a^T P_g l_g \quad (5.12)$$

Unter Beachtung der ersten Normalgleichung  $a^T P_g v_g = 0$  ergibt sich:

$$- a^T P_g a x_1 = v_s^* = a^T P_g A x - a^T P_g l_g \quad (5.13)$$

Der Schreiberschen Gleichung wird das Gewicht

$$p^* = -(a^T P_g a)^{-1}$$

zugeordnet.

Nach Einführen der Schreiberschen Verbesserungen (5.11) und der Schreiberschen Gleichung (5.13) geht das ursprüngliche Fehlergleichungssystem (5.10) in das System der Schreiberschen Rechengleichungen über:

$$\begin{pmatrix} v_s \\ \cdots \\ v_s^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ a^T P_g A \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} l_g \\ \cdots \\ a^T P_g l_g \end{pmatrix} P_s = \begin{pmatrix} P_g & | & 0 \\ \cdots & | & \cdots \\ 0 & | & P^* \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Aus diesen Rechengleichungen bildet man nun formal die Normalgleichungen, aus denen die Unbekannten  $x$  bestimmt werden können (einmal reduzierte Normalgleichungen). Die vorwegeliminierte Unbekannte  $x_1$  kann aus der Schreiberschen Gleichung (5.13) bestimmt werden:

$$x_1 = -v_s^* (a^T P_g a)^{-1}$$

mit

$$v_s^* = a^T P_g A x - a^T P_g l_g$$

**Beweis dieses Rechenverfahrens:**

Ausgehend von den Fehlergleichungen (5.10) werden die Normalgleichungen aufgestellt und daraus die Unbekannte  $x_1$  eliminiert. Das verbleibende System für die Unbekannten  $x$  muß dann mit dem aus den Rechengleichungen (5.14) gebildeten Normalgleichungssystem für  $x$  übereinstimmen.

Zu den Fehlergleichungen (5.10) gehört folgendes Normalgleichungssystem:

$$\left( \begin{array}{cc|c} a^T P_g a & & a^T P_g A \\ \hline & & \\ A^T P_g a & & A^T P_g A \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T P_g l_g \\ \\ A^T P_g l_g \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (a^T P_g a)x_1 + a^T P_g A x &= a^T P_g l_g && \left| \cdot \left( - (a^T P_g a)^{-1} \cdot A^T P_g a \right) \right. \\ (A^T P_g a)x_1 + A^T P_g A x &= A^T P_g l_g \\ + (A^T P_g A - (a^T P_g a)^{-1} A^T P_g a \cdot a^T P_g A)x &= A^T P_g l_g - (a^T P_g a)^{-1} A^T P_g a \cdot a^T P_g l_g \end{aligned}$$

Zu den Rechengleichungen (5.14) gehört folgendes Normalgleichungssystem:

Die Normalgleichungsmatrix  $N$  ergibt sich als folgendes Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} P_g & & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & p^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \\ a^T P_g A \end{pmatrix} \\ (A^T \quad | \quad A^T P_g a) (A^T P_g \quad | \quad A^T P_g a p^*) \quad (N) \\ \uparrow \\ A^T P_g A + p^* A^T P_g a a^T P_g A$$

Für den Vektor der rechten Seiten ergibt sich analog:

$$A^T P_g l_g + p^* A^T P_g a a^T P_g l_g$$

Unter Beachtung von  $p^* = (a^T P_g a)^{-1}$  wird die Übereinstimmung beider Normalgleichungssysteme klar.

**Berechnung von  $v_g^T P_g v_g$ :**

Es gibt dazu 2 Möglichkeiten:

- aus den ursprünglichen Fehlergleichungen (5.10). Dabei müssen alle Unbekannten zuvor berechnet werden;
- aus den Schreiberschen Rechengleichungen (5.14)(Anzahl n+1) nach der Formel:

$$v_g^T P_g v_g = v_s^T P_g v_s + v_s^* (-a^T P_g a)^{-1} v_s^* \tag{5.15}$$

oder

$$[v_g v_g P_g] = [v_s v_s P_g] + v_s^* v_s^* p^*$$

Beweis von (5.15) durch Einsetzen von (5.11) und (5.13):

$$v_g^T P_g v_g = (v_g^T - x_1 a^T) P_g (v_g - x_1 a) - x_1^2 a^T P_g a = v_g^T P_g v_g - 2x_1 \underbrace{a^T P_g v_g}_{=0} \tag{q.e.d.}$$

**5.8.3 Das Verfahren der reduzierten Fehlergleichungen**

Wir gehen aus von den Fehlergleichungen (5.10) unter Beachtung der in den Vorbemerkungen getroffenen Voraussetzungen:

- $P_g = P$
- $a =$  einspaltige Matrix

Die übrigen benötigten Bezeichnungen werden übernommen.

Damit ergeben sich folgende Fehlergleichungen:

$$v_g = ax_1 + Ax - l_g \tag{5.16}$$

Unter Verwendung der ersten Normalgleichung:

$$a^T P v_g = 0$$

ergibt sich in Analogie zur Schreiberschen Gleichung (5.13) durch Linksmultiplikation von (5.16) mit  $a^T P$  folgende Summengleichung:

$$a^T P a x_1 + a^T P A x - a^T P l_g = 0 \quad | : a^T P a$$

$$x_1 + \frac{1}{a^T P a} a^T P A x - \frac{1}{a^T P a} a^T P l_g = 0 \tag{5.17}$$

Um aus (5.16) und (5.17) die Unbekannte  $x_1$  vorwegeliminieren zu können, wird (5.17) von links mit  $a$  durchmultipliziert:

$$a x_1 + \frac{1}{a^T P a} a a^T P A x - \frac{1}{a^T P a} a a^T P l_g = 0 \tag{5.17}$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen von den Fehlergleichungen (5.16) ergeben sich die reduzierten Fehlergleichungen:

$$v_g = (A - \frac{1}{a^T P a} a a^T P A) x - (l_g - \frac{1}{a^T P a} a a^T P l_g) \tag{5.18}$$

Bildet man aus den reduzierten Fehlergleichungen (5.18) die Normalgleichungen zur Bestimmung von  $x$ , so ergibt sich unmittelbar dasselbe einmal reduzierte Normalgleichungssystem.

Die vorwegeliminierte Unbekannte  $x_1$  ergibt sich aus der Summengleichung (5.17):

$$x_1 = -\frac{1}{a^T P a} (a^T P A x - a^T P l_g)$$

**Fehlerrechnung:**

Die reduzierten Fehlergleichungen (5.18) und die ursprünglichen Fehlergleichungen (5.16) führen auf ein- und dieselbe Quadratsumme der Verbesserungen. Durch die Subtraktion der Summengleichung (5.17) (die ja den Wert 0 hat) von jeder Fehlergleichung ändern sich nämlich die Verbesserungen der ursprünglichen Fehlergleichungen nicht.

## 6 Sonderformen der Ausgleichung

### 6.1 Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen

Nach HELMERT „Ausgleichsrechnung“: „Man spricht von *bedingten Beobachtungen*, wenn zwischen „wahren Werten“ der Beobachtungsgrößen *Bedingungsgleichungen* bestehen, die auch von ihren ausgeglichenen Werten streng zu erfüllen sind“.

Solche Bedingungen kommen zustande aufgrund eines **mathematischen Modells**, in dem ein geometrischer, geophysikalischer oder geodynamischer Zusammenhang beschrieben wird und in dem mehr Größen gemessen wurden, als zur eindeutigen Festlegung des mathematischen Modells notwendig sind.

Typische Beispiele für solche -nichtlinearen oder linearen- Bedingungsgleichungen sind

**Beispiel 6.1:** Winkelsumme im ebenen oder sphärischen Dreieck

$$(l_\alpha + v_\alpha) + (l_\beta + v_\beta) + (l_\gamma + v_\gamma) = 180^\circ + \text{sphärischer Exzess}$$

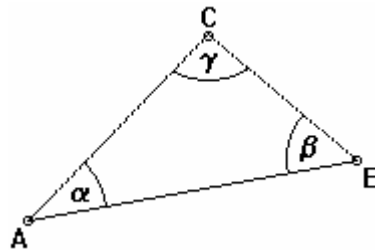


Abbildung 6.1 Winkelsumme im Dreieck

**Beispiel 6.2:** Beobachtung überschüssiger Winkel auf einer Station

$$(l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) - (l_3 + v_3) = 0$$

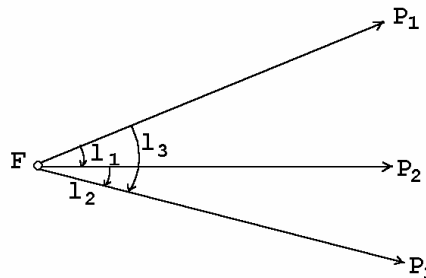


Abbildung 6.2: Winkelmessung

Jede über die zur eindeutigen Festlegung des mathematischen Modells notwendige Anzahl von Beobachtungen hinausgehende Beobachtung (jede **überschüssige** Beobachtung) liefert eine Bedingungsgleichung.

Analog zur vermittelnden Ausgleichung erfolge die Ausgleichung derart, dass:

- die ausgeglichenen Beobachtungen die Bedingungen exakt erfüllen,
- die Summe der quadratischen, gewogenen Verbesserungen minimal werde:  $[vvp] \rightarrow \min$ .

## 6.2 Herleitung der Gebrauchsformeln für die bedingte Ausgleichung

### 6.2.1 Allgemeiner, nichtlinearer Ansatz zur Aufstellung von Bedingungs-, Korrelaten- und Normalgleichungen

In einem r-fach überbestimmten System seien die

- n Größen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  mit den
- Gewichten  $p_1, p_2, \dots, p_n$

unmittelbar beobachtet worden. Im Falle gegenseitig abhängiger Beobachtungen sei die Kovarianzmatrix  $K_{l_i}$  bzw. die Kofaktorenmatrix  $Q_{l_i}$  bekannt.

Durch Entfernen der r überschüssigen Beobachtungen wird das System in ein eindeutig bestimmtes Hauptssystem mit m Beobachtungen überführt. Dann besteht zwischen n, m und r der Zusammenhang:

$$\begin{array}{rcl} \text{Anzahl aller Beob.} & - \text{Anzahl notw. Beob.} & = \text{Anzahl der Bedingungsgleichungen} \\ n & - m & = r \end{array}$$

Zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$f(\bar{l}) = f(l+v) = s \quad (6.1)$$

Ausführlich:

$$\begin{aligned} f_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) &= s_1 \\ f_2(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) &= s_2 \\ &\vdots \\ f_r(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) &= s_r \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Zu ein- und demselben Ausgleichungsproblem gibt es immer mehrere Hauptsysteme. Entsprechend gibt es zu einem Ausgleichungsproblem immer mehrere äquivalente Systeme von Bedingungsgleichungen, die zur gleichen Lösung des Ausgleichungsproblems führen. Die Auswahl eines „geeigneten“ Hauptsystems und damit eines Systems von Bedingungsgleichungen unter den verschiedenen möglichen kann unter Gesichtspunkten der numerischen Rechnung erfolgen.
- Bei richtiger Auswahl der Bedingungsgleichungen sind diese gegenseitig unabhängig  $\leftrightarrow$  Determinante der

$$\text{Jakobimatrix } \frac{\partial f(\bar{l})}{\partial l}$$

- ist ungleich 0, oder der Rang der Jakobimatrix ist gleich der Anzahl ihrer Zeilen.
- Umgekehrt bedeutet dies: Wenn die Bedingungsgleichungen nicht richtig aufgestellt werden, so können sie gegenseitig abhängig sein und der Rang der Jakobimatrix wird kleiner als die Anzahl ihrer Zeilen. Dann wird das zugehörige Normalgleichungssystem singulär und damit seine Lösung **mehrdeutig**.
- Nach der Aufstellung richtiger Bedingungsgleichungen und nach ihrer Linearisierung ist das weitere Vorgehen mehr oder weniger Routinearbeit.



Die Bedingungsgleichungen sollen mit der Nebenbedingung:

$$v^T P v = (\bar{1} - 1)^T P (\bar{1} - 1) \Rightarrow \min.$$

erfüllt werden.

Ansatz nach Lagrange mit den **Lagrangeschen Multiplikatoren**:

Funktion, welche zu minimieren ist:

$$\Phi = v^T P v - 2k^T (f(\bar{1} + v) - s) \quad (6.2)$$

bzw.

$$\Phi = \Phi(\bar{1}, k) = (\bar{1} - 1)^T P (\bar{1} - 1) - 2k^T (f(\bar{1}) - s)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{1}} = 2P(\bar{1} - 1) - 2 \left( \frac{\partial f(\bar{1})}{\partial \bar{1}} \right) k = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = (f(\bar{1}) - s) = 0$$

Damit bekommt man die nichtlinearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{1} - P^{-1} \left( \frac{\partial f(\bar{1})}{\partial \bar{1}} \right) k &= 1 && \text{Anzahl } n! \\ f(\bar{1}) &= s && \text{Anzahl } r! \end{aligned} \quad (6.3)$$

D.h. man bekommt ein nichtlineares Gleichungssystem mit n Unbekannten  $\bar{1}$  und weiteren r Unbekannten k!

Mit der in der Ausgleichung üblichen Abkürzung für die Jakobimatrix:

$$\frac{\partial f(\bar{1})}{\partial \bar{1}} := \bar{B} := \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_n \\ \vdots & & & \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_n \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

also

$$\bar{B}^T = \frac{\partial f(\bar{1})}{\partial \bar{1}} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 & \cdots & \bar{r}_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{r}_2 \\ \vdots & & & \\ \bar{a}_n & \bar{b}_n & \cdots & \bar{r}_n \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Die Gleichungen zur Ermittlung der ausgeglichenen Beobachtungen und der Korrelaten sind dann

$$\begin{aligned}
 \bar{l}_1 - \frac{\bar{a}_1}{p_1} \cdot k_1 - \frac{\bar{b}_1}{p_1} \cdot k_2 - \dots - \frac{\bar{r}_1}{p_1} \cdot k_r &= l_1 \\
 \bar{l}_2 - \frac{\bar{a}_2}{p_2} \cdot k_1 - \frac{\bar{b}_2}{p_2} \cdot k_2 - \dots - \frac{\bar{r}_2}{p_2} \cdot k_r &= l_2 \\
 \bar{l}_n - \frac{\bar{a}_n}{p_n} \cdot k_1 - \frac{\bar{b}_n}{p_n} \cdot k_2 - \dots - \frac{\bar{r}_n}{p_n} \cdot k_r &= l_n \\
 f_1(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n) &= s_1 \\
 f_2(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n) &= s_2 \\
 &\vdots \\
 f_r(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n) &= s_r
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

### 6.2.2 Linearisierung und üblicher linearer Ansatz

$$\bar{l}_i = l_i + v_i \quad \Leftrightarrow \quad \bar{l} = l + v \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial f(\bar{l})}{\partial l} \approx \frac{\partial f(l)}{\partial l} := B \tag{4.41}$$

Damit kann man insbesondere setzen

$$r(\bar{l}) = f(l) + \left(\frac{\partial f(l)}{\partial l}\right) \cdot v \quad (\text{Linearisierung nach Taylor})$$

Damit wird aus den obigen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 l + v - P^{-1}B \cdot k &= l \quad \Rightarrow \quad v = P^{-1}B \cdot k \\
 f(l) + B^T v &= s \\
 (B^T P^{-1}B)k &= s - f(l) = w
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Man bekommt damit die **Gebrauchsgleichungen**.

Nichtlineare Bedingungsgleichungen:

$$f(\bar{l}) = f(l + v) = s \tag{6.1}$$

Linearisierung mit Hilfe der Jakobimatrix

$$\frac{\partial f(l)}{\partial l} = B \tag{4.41}$$

(Hier liegt die Abweichung zur „exakten nichtlinearen Lösung!!“)

Definition der Widersprüche:

$$s - f(l) := w \tag{6.9}$$

Normalgleichungen:

$$(B^T P^{-1} B) \cdot k = w \quad (6.10)$$

**Korrelatengleichungen:**

$$v = P^{-1} B \cdot k \quad (6.11)$$

Berechnungsprobe:

Einsetzen der aus  $v = P^{-1} B \cdot k$  ermittelten Verbesserungen in die linearisierten Verbesserungsgleichungen

$$B^T v = w \quad (6.12)$$

Einsetzen der ausgeglichenen Beobachtungen in die ursprünglichen nichtlinearen Bedingungsgleichungen

$$f(\bar{l} + v) = f(\bar{l}) = s \quad (6.1)$$

Kontrolle nach den Regeln der nichtlinearen Bedingungsungleichung: Einsetzen in die linearen Korrelatengleichungen, jedoch mit an der Stelle  $\bar{l}$  ermittelten Jakobimatrix

$$\begin{aligned} \bar{l} - P^{-1} \left( \frac{\partial f(\bar{l})}{\partial l} \right) \cdot k &= 1 \\ \bar{l} - P^{-1} \bar{B} \cdot k &= 1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Diese letzte Probe bleibt auch bei beliebig großen  $v = (\bar{l} - l)$  gültig, d.h.  $v = P^{-1} \bar{B} \cdot k$  zusammen mit  $f(l) = s$  ist die umfassende Kontrolle!

### 6.2.3 Ermittlung der Verbesserungen und der [vvp]

- durch Bildung von  $v^T P v$  mit den aus  $v = P^{-1} B \cdot k$  ermittelten Verbesserungen
- durch Bilden von  $v^T P v$  aus Korrelaten und Widerspruch mit

$$\left. \begin{aligned} v &= P^{-1} B \cdot k \\ v^T &= k^T B^T P^{-1} \end{aligned} \right\} v^T P v = k^T B^T P^{-1} P P^{-1} B \cdot k$$

$$v^T P v = k^T \underbrace{(B^T P^{-1} B)}_{=w} \cdot k = k^T w = w^T k \quad (6.14)$$

### 6.2.4 Zusammenstellung der linearen Beziehungen bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen

Die nachfolgend in Tabelle 6-1 zusammengestellten linearen Beziehungen gelten gegebenenfalls nach Linearisierung der nichtlinearen Bedingungsbeziehungen.

	1 $l$	2 $w$	3 $k$	4 $v$	5 $\bar{l}$
1 $l =$	$E \cdot l$				
2 $w =$	$s - B^T l$ $(s - f(l))$	$E \cdot w$	$(B^T P^{-1} B) k$	$B^T v$	
3 $k =$	$(B^T P^{-1} B)^{-1} (s - B^T l)$ $= -(B^T P^{-1} B)^{-1} B^T l$ $+ (B^T P^{-1} B)^{-1} s$	$(B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot w$	$E \cdot k$	$(B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot B^T v$	
4 $v =$	$-P^{-1} B (B^T P^{-1} B)^{-1} B^T l$ $+ P^{-1} B (B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot s$ $= -B_0 l + \bar{s}$	$P^{-1} B (B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot w$	$P^{-1} B \cdot k$	$E \cdot v$ $B_0 \cdot v$	
5 $\bar{l} =$	$(E - P^{-1} B (B^T P^{-1} B)^{-1} B) l$ $+ \bar{s}$ $= (E - B_0) l + \bar{s}$				$E \cdot \bar{l}$ $(E - B_0) \cdot \bar{l}$ $+ \bar{s}$

Tabelle 6-1: Lineare Beziehungen bei bedingten Beobachtungen

Für die „spezielle Einheitsmatrix“  $B_0 := P^{-1} B (B^T P^{-1} B)^{-1} B^T$  gilt:

- a)  $B^T B_0 = B^T$  (Name „spezielle Einheitsmatrix“!)
- b)  $(B_0)^n = B_0$  Idempotenz. Beweis durch Nachrechnen bzw. vollständige Induktion
- c)  $B_0 \cdot v = v \Rightarrow$  d.h. die  $v$  sind Eigenvektoren von  $B_0$  für  $\lambda = 1$   
 $B_0 \cdot v = \lambda \cdot v$  für  $\lambda = 1$
- d)  $\bar{l} = (E - B_0) \cdot \bar{l} + \bar{s} \Rightarrow$  d.h. die  $\bar{l}$  sind -bis auf konstanten Vektor  $\bar{s}$ - Eigenvektoren von  $(E - B_0)$  für  $\lambda = 1$   
 $(E - B_0) \cdot \bar{l} = \lambda \cdot \bar{l} + \bar{s}$
- e)  $B_0$  besitzt nur die Eigenwerte 0 und 1:

Für einen Eigenwert mit dem zugehörigen Eigenvektor muss nämlich gelten:

$$B_0 x = \lambda x \quad (*)$$

$$B_0 B_0 x = \lambda B_0 x \Rightarrow B_0 x = \lambda^2 x \quad (**)$$

Gleichsetzen von (\*) und (\*\*) liefert:

$$\lambda \cdot x = \lambda^2 \cdot x$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn  $\lambda = 1$  oder  $\lambda = 0$ .

Die Tabelle ergibt sich durch elementare lineare Umformungen aus den oben hergeleiteten Grundformeln und kann leicht nachgerechnet werden.

Sie erlaubt dann insbesondere durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes alle bei bedingten Beobachtungen auftretenden Kofaktoren zu ermitteln. Dazu siehe Tabelle 6-2.

### 6.2.5 Kofaktoren von Größen, welche aus der Ausgleichung hervorgehen

In völliger Analogie zu dem Kapitel der vermittelnden Ausgleichung stellt dieses Kapitel eine Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes dar.

Unter Verwendung der linearen Beziehungen aus Tabelle 6-1 erhält man dann sofort die nachfolgende Tabelle 6-2.

**Zusammenstellung aller Kofaktoren:**

	1 l	2 w	3 k	4 v	5 $\bar{l}$
1 l	$Q_{l,l} = P^{-1}$	$Q_{l,w} = -P^{-1}B$	$Q_{l,k} = -P^{-1}B \cdot (B^T P^{-1} B)^{-1}$	$Q_{l,v} = -P^{-1}B(B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot B^T P^{-1}$	$P^{-1} - P^{-1}B \cdot (B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot B^T P^{-1}$
2 w	$Q_{w,l} = -B^T P^{-1}$	$(B^T P^{-1} B)$	$E$	$B^T P^{-1}$	$0$
3 k	$-(B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot B^T P^{-1}$	$E$	$(B^T P^{-1} B)^{-1}$	$(B^T P^{-1} B) B^T P^{-1}$	$0$
4 v	$-P^{-1}B(B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot B^T P^{-1}$	$P^{-1}B$	$P^{-1}B(B^T P^{-1} B)^{-1}$	$P^{-1}B(B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot B^T P^{-1} = B_0 P^{-1}$	$0$
5 $\bar{l}$	$P^{-1} - P^{-1}B \cdot (B^T P^{-1} B)^{-1} B^T P^{-1} = (E - B_0) P^{-1}$	$0$	$0$	$0$	$P^{-1} - Q_{v,v}$

Tabelle 6-2: Kofaktoren bei bedingten Beobachtungen

### 6.3 Beispiel

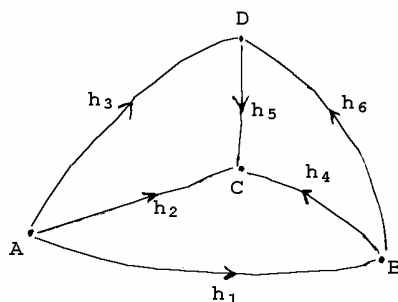


Abbildung 6.3: Höhenbestimmung

Beobachtete Höhenunterschiede:

$$h_1 = 1.015 \text{ m} \quad ; \quad s_1 = 6.25 \text{ km}$$

$$h_2 = 12.570 \text{ m} \quad ; \quad s_2 = 4.7 \text{ km}$$

$$h_3 = 6.161 \text{ m} \quad ; \quad s_3 = 7.15 \text{ km}$$

$$h_4 = 11.563 \text{ m} \quad ; \quad s_4 = 3.95 \text{ km}$$

$$h_5 = 6.414 \text{ m} \quad ; \quad s_5 = 4.25 \text{ km}$$

$$h_6 = 5.139 \text{ m} \quad ; \quad s_6 = 5.50 \text{ km}$$

Hauptsystem:  $h_1, h_2, h_3$

$$n = 6$$

Anzahl der Beobachtungen

$$u = 3$$

Anzahl der Unbekannten

$$r = n - u = 3$$

Anzahl der Bedingungsgleichungen

Bedingungsgleichungen:

allgemein:

$$f(\bar{l}) = f(l+v) = s \tag{6.1}$$

$$h_3 + v_3 + h_5 + v_5 - h_2 - v_2 = 0$$

$$h_2 + v_2 - h_4 - v_4 - h_1 - v_1 = 0$$

$$h_4 + v_4 - h_5 - v_5 - h_6 - v_6 = 0$$

$$B^T v = w$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2 - h_5 - h_3 \\ h_1 + h_4 - h_2 \\ h_5 + h_6 - h_4 \end{pmatrix}$$

$B^T$

$w$

Gewichtsansatz:

$$P^{-1} \sim S$$

$$P^{-1} = [6.25; 4.7; 7.15; 3.95; 4.25; 5.50]$$

Rechenformeln:

$$B^T \underbrace{P^{-1} B}_{\underline{v}} \cdot k = w \quad (6.10)$$

(Normalgleichungen)

$$k = (B^T P^{-1} B)^{-1} w$$

$$v = P^{-1} B k$$

$$\bar{l} = l + v$$

$$v^T P v = w^T k$$

Zahlenrechnung:

$$B^T P^{-1} B = \begin{vmatrix} 16.1 & -4.7 & -4.25 \\ -4.7 & 14.9 & -3.95 \\ -4.25 & -3.95 & 13.7 \end{vmatrix}$$

$$\text{Det}(B^T P^{-1} B) = 2306$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 16,1 \overbrace{(14,9 \cdot 13,7 - 3,95 \cdot 3,95)}^{188,5} = 3035,3 \\ + 4,7 \overbrace{(-4,7 \cdot 13,7 - 3,95 \cdot 4,25)}^{-81,2} = -381,6 \\ - 4,25 \overbrace{(4,7 \cdot 3,95 + 14,9 \cdot 4,25)}^{-81,9} = -348,1 \\ \hline \Sigma = \underline{\underline{2305,6}} \end{array}$$

$$(B^T P^{-1} B)^{-1} = \frac{1}{2306} \begin{vmatrix} 188 & 81,2 & 81,9 \\ & 202 & 83,6 \\ & & 218 \end{vmatrix}$$

$$w = \begin{vmatrix} -5 \\ +8 \\ -10 \end{vmatrix} \text{ [mm]}$$

(Widerspruchsvektor)

$$k = \begin{vmatrix} -0,481 \\ 0,462 \\ -0,833 \end{vmatrix} \text{ [mm]}$$



$$v^T = [-1,0 \quad +3,0 \quad -3,4 \quad -3,9 \quad +1,5 \quad +4,6] \text{ [mm]}$$

Ausgegliche Höhenunterschiede:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= 1,014 \text{ m} \\ \bar{h}_2 &= 12,573 \text{ m} \\ \bar{h}_3 &= 6,157_6 \text{ m} \\ \bar{h}_4 &= 11,599_1 \text{ m} \\ \bar{h}_5 &= 6,415_5 \text{ m} \\ \bar{h}_6 &= 5,143_6 \text{ m} \end{aligned}$$

$$v^T P v = w^T k \quad (\text{Kontrolle})$$

$$11,9 = 12,0 \quad \text{o.k.}$$

Fehlerrechnung:

$$m_0^2 = \frac{v^T P v}{r} = \frac{12,0}{3} = 4$$

$$m_0 = \pm 2 \text{ mm / km}$$

$$Q_{vv} = P^{-1} B (B^T P^{-1} B)^{-1} B^T P^{-1}$$

$$Q_{vv} P = P^{-1} B (B^T P^{-1} B)^{-1} B^T = B_0$$

Diagonale von  $Q_{v,v}P$  --> Redundanzanteile:

$$B^T (B^T P^{-1} B)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6,25 & 0 \\ -4,7 & 4,7 & 0 \\ 7,15 & 0 & 0 \\ 0 & -3,95 & 3,95 \\ 4,25 & 0 & -4,25 \\ 0 & 0 & -5,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,46 \\ 0,58 \\ 0,43 \\ 0,45 \\ 0,43 \end{pmatrix}$$

$P^{-1}B$

Spur( $Q_{vv}P$ ) = 2,9

(Soll = 3,0)

$$Q_{\bar{\bar{h}}} = P^{-1} - Q_{vv} = (E - Q_{vv}P)P^{-1}$$

$$\text{Diag}(Q_{\bar{\bar{h}}}) = [2,81 \quad 2,54 \quad 3,00 \quad 2,25 \quad 2,34 \quad 3,14]$$

$$m_{\bar{h}_1} = m_0 \sqrt{Q_{11}} = \pm 2,0 \cdot \sqrt{2,81} = \pm 3,4 \text{ mm}$$

$$m_{\bar{h}_2} = \pm 3,2 \text{ mm}$$

$$m_{\bar{h}_3} = \pm 3,5 \text{ mm}$$

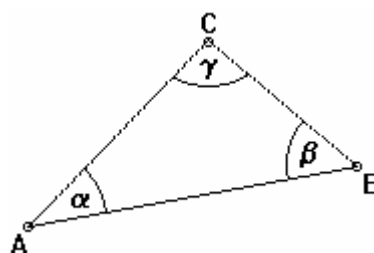
$$m_{\bar{h}_4} = \pm 3,0 \text{ mm}$$

$$m_{\bar{h}_5} = \pm 3,1 \text{ mm}$$

$$m_{\bar{h}_6} = \pm 3,5 \text{ mm}$$

## 6.4 Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten

Beispiel 6.3:



Gemessen:  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha + v_\alpha = x$$

$$\beta + v_\beta = y$$

$$\gamma + v_\gamma = z$$

$$x + y + z = 200$$

Abbildung 6.4: Dreieck

Beispiel 6.4: Koordinatentransformation

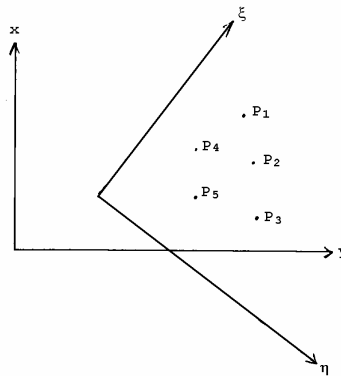


Abbildung 6.5: Koordinatentransformation

Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} a + e = 0 \\ b - d = 0 \end{array} \right\} (4\text{-Parameter})$$

$$a^2 + b^2 = 1 (3\text{-Parameter})$$

6-Parameter-Transformation:

$$x_i + v_{xi} = a\xi_i + b\eta_i + c$$

$$y_i + v_{yi} = d\xi_i + e\eta_i + f$$

4-Parameter-Transformation:

$$x_i + v_{xi} = a\xi_i + b\eta_i + c$$

$$y_i + v_{yi} = b\xi_i - a\eta_i + d$$

3-Parameter-Transformation:

$$x_i + v_{xi} = \xi_i \cos\varphi + \eta_i \sin\varphi + c$$

$$y_i + v_{yi} = \xi_i \sin\varphi - \eta_i \cos\varphi + d$$

Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} v &= f(x) - \tilde{l} \\ g(x) &= \tilde{c} \end{aligned} \right\} \text{ nicht linear} \quad (6.15)$$

Linearisierung:

$$v = A\Delta x - l$$

$$C^T \Delta x = c \quad (6.16)$$

Lösung:

$$\Phi \equiv v^T P v + 2k^T (C^T \Delta x - c) \Rightarrow \min \quad (6.17)$$

bzw.

$$\Phi \equiv (\Delta x^T A^T - l^T) P (A\Delta x - l) + 2k^T (C^T \Delta x - c) \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\Delta x^T A^T P A + 2k^T C^T = 2l^T P A$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = 0 \quad \rightarrow \quad C^T \Delta x - c = 0$$

$$A^T P A \Delta x + C^T k = A^T P l \quad (*)$$

$$C^T \Delta x = c \quad (**)$$

Normalgleichungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} A^T P A & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Fälle:

- $A^T P A$  singular: Gauß-Algorithmus mit Pivotisierung  
oder Zeilen-Spalten-Tausch und Gesamtsystem lösen (invertieren)
- $A^T P A$  regulär:  $(A^T P A)^{-1}$  existiert

Elimination von  $\Delta x$ : (\*) mit  $C^T(A^T P A)^{-1}$  von links multiplizieren und (\*\*) subtrahieren

$$C^T(A^T P A)^{-1} C k = C^T(A^T P A)^{-1} A^T P l - c$$

$$k = (C^T(A^T P A)^{-1} C)^{-1} (C^T(A^T P A)^{-1} A^T P l - c)$$

k eingesetzt:

$$\Delta x = (A^T P A)^{-1} (A^T P l - C k) \quad (6.19)$$

Berechnung der Kofaktorenmatrizen von k und x:

$Q_{kk}$  und  $Q_{xx}$  sind Teilmatrizen aus

$$\begin{pmatrix} A^T P A & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(A^T P A)^{-1} = N^{-1}$$

$$k = (C^T N^{-1} C)^{-1} C^T N^{-1} A^T P l + \text{const}$$

$$Q_{kk} = (C^T N^{-1} C)^{-1} C^T N^{-1} A^T P P^{-1} P A N^{-1} C (C^T N^{-1} C)^{-1}$$

$$Q_{kk} = (C^T N^{-1} C)^{-1} \quad (6.20)$$

$$Q_{xx} = N^{-1} - N^{-1} C (C^T N^{-1} C)^{-1} C^T N^{-1} \quad (6.21)$$

$$v^T P v = v^T P (A \Delta x - l) = v^T P A \Delta x - v^T P l$$

$$v^T P l = l^T P v = l^T P (A \Delta x - l) = l^T P A \Delta x - l^T P l$$

$$v^T P v = l^T P l - l^T P A \Delta x + \Delta x^T A^T P (A \Delta x - l)$$

$$v^T P v = l^T P l - l^T P A \Delta x + \Delta x^T \underbrace{A^T P A \Delta x}_{A^T P l - C k} - \Delta x^T A^T P l$$

$$v^T P v = l^T P l - l^T P A \Delta x + \Delta x^T A^T P l - \Delta x^T C k - \Delta x^T A^T P l$$

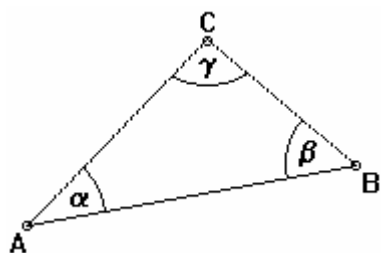
$$v^T P v = l^T P l - l^T P A \Delta x - \Delta x^T C k$$

$$v^T P v = l^T P l - l^T P A \Delta x - c^T k$$

$$v^T P v = l^T P l - l^T P A \Delta x \quad (6.22)$$

(gilt bei vermittelnden Beobachtungen)

Beispiel 6.5:



Beobachtungen:

$$\alpha = 45,02 \text{ gon}$$

$$\beta = 55,03 \text{ gon}$$

$$\gamma = 100,01 \text{ gon}$$

Abbildung 6.6: Winkelsumme im Dreieck

$$v_\alpha = x - \alpha$$

$$v_\beta = y - \beta$$

$$v_\gamma = z - \gamma$$

$$x + y + z = 200 \text{ gon}$$

Linearisierung:  $x_0 = 45^\text{g}$  ,  $y_0 = 55^\text{g}$  ,  $z_0 = 100^\text{g}$

$$v_\alpha = \Delta x - 2^\text{c}$$

$$v_\beta = \Delta y - 3^\text{c}$$

$$v_\gamma = \Delta z - 1^\text{c}$$

$$\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = [1 \ 1 \ 1], \quad P = E$$

$$A^T P A = E, \quad (A^T P A)^{-1} = N^{-1} = E$$

$$3k = 6$$

$$k = 2$$

$$\Delta x = 1 - Ck = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

$$x = 45^\text{g}$$

$$y = 55,01^\text{g}$$

$$z = 99,99^\text{g}$$

$$v^T P v = 14 - 2 = 12$$

Kontrolle:

$$\left. \begin{array}{l} v_\alpha = -2 \\ v_\beta = -2 \\ v_\gamma = -2 \end{array} \right\} v^T P v = 12$$

## 6.5 Bedingungsgleichungen mit Unbekannten

Ansatz:

$$f(\bar{l}, x) = u \tag{6.23}$$

(implizit)

$$\bar{l} = g(x) \tag{6.24}$$

(explizit)

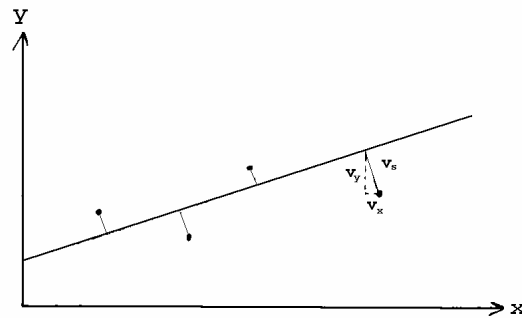


Abbildung 6.7: Ausgleichende Gerade

$$y = ax + b$$

$$v_s^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$\sum v_{xi}^2 + v_{yi}^2 \Rightarrow \min.$$

Annahme:

- x fehlerfrei

$$y + v_y = x\underline{a} + \underline{b} \quad (\text{vermittelnd})$$

- y beobachtet
- x,y beobachtet

$$y + v_y = \underline{a}(x + v_x) + \underline{b} \quad (\text{bedingte Ausgleichung mit Unbekannten})$$

Linearisieren der Bedingungsgleichungen mit  $l, x_0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial l} v + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x = u - f(l, x_0) \tag{6.25}$$

$$B^T v + A \Delta x = w$$

Bei schlechten Näherungswerten kann es notwendig sein, an der Stelle der verbesserten Beobachtungen

$$\bar{l}_1 = l + v_1$$

zu linearisieren.

$$v_1 = \text{Verbesserung aus der 1. Iteration}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{l}_1} \Delta \bar{l}_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{u} - f(\bar{l}_1, \mathbf{x}_1) \\ \bar{l} &= \bar{l}_1 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \Delta \bar{l} \quad \rightarrow \quad \Delta \bar{l} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}}_{\mathbf{B}^T} \mathbf{v} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}}_{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{u} - \underbrace{f(\bar{l}_1, \mathbf{x}_1)}_{\mathbf{w}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}}_{\mathbf{B}^T} \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

Minimierung von  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ :

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} - \mathbf{w}) \Rightarrow \min.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = 0 \rightarrow 2\mathbf{v}^T \mathbf{P} - 2\mathbf{k}^T \mathbf{B}^T = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{k} \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = 0 \rightarrow \mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} - \mathbf{w} = 0 \quad (\text{II})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{x}} = 0 \rightarrow -2\mathbf{k}^T \mathbf{A} = 0 \quad (\text{III})$$

(I) in (II) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{k} + \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{w} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elimination von  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{w} \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{x} \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Vorsicht bei Linearisierung:

$$\bar{l}_1 = l + v_1, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_1$$

$\Delta \mathbf{x}_1, v_1$  aus der 1. Iteration

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}_1} \Delta l_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1} \Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{w}$$

mit  $v_2 = v_1 + \Delta l_1$ ,  $v_2^T P v_2 \Rightarrow \min$ .

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} \underbrace{(\Delta l_1 + v_1)}_{v_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x = w + \frac{\partial f}{\partial l_1} v_1$$

damit korrekte Ausgangsgleichung.

Ableitung der Kofaktoren der ausgeglichenen Beobachtungen und der Unbekannten:

Rechengang: **Fehlerfortpflanzung**

$$Q_{\Delta x \Delta x} ?$$

$$\text{mit } \Delta x = (A^T (B^T P^{-1} B)^{-1} A)^{-1} A^T (B^T P^{-1} B)^{-1} w$$

$$Q_{\Delta x \Delta x} = (A^T (B^T P^{-1} B)^{-1} A)^{-1} A^T (B^T P^{-1} B)^{-1} .$$

$$Q_{ww} (B^T P^{-1} B)^{-1} A (A^T (B^T P^{-1} B)^{-1} A)^{-1}$$

$$w = u - f(l, x_0)$$

$$w = B^T \Delta l \rightarrow Q_{ww} = B^T Q_{ll} B$$

$$Q_{\Delta x \Delta x} = (A^T (B^T P^{-1} B)^{-1} A)^{-1}$$

**Schätzung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit:**

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{r}} \quad (6.27)$$

$r = \text{Anzahl der Bedingungsgleichungen} - \text{Anzahl der Unbekannten}$

$v^T P v$  mit  $v = P^{-1} B k$ :

$$v^T P v = k^T B^T P^{-1} P P^{-1} B k = k^T B^T P^{-1} B k$$

Mit

$$B^T P^{-1} B k = w - A \Delta x$$

gilt:

$$v^T P v = k^T w - k A \Delta x$$

Und mit

$$A^T k = 0$$

wird

$$v^T P v = k^T w \quad (6.28)$$



**Übergang zur vermittelnden Ausgleichung:**

Bemerkung: Die Normalgleichungen für  $\Delta x$  entsprechen den Normalgleichungen der vermittelnden Ausgleichung für  $P = (B^T P^{-1} B)^{-1}$

Ansatz:

$$\underbrace{B^T v}_{v_s} + A \Delta x = w \quad (6.29)$$

Zusammenfassung:

$$B^T v = v_s \quad (6.30)$$

Minimum:

$$\begin{aligned} v^T P v &= v_s^T P_{ss} v_s \\ s &= f(l, x) - u \\ \Delta s &= B^T \Delta l \end{aligned}$$

$$Q_{ss} = B^T Q_{ll} B = B^T P^{-1} B \rightarrow P_{ss} = (B^T P^{-1} B)^{-1} \quad (6.31)$$

Damit Minimum:

$$v^T P v = v_s^T P_{ss} v_s = v_s^T (B^T P^{-1} B)^{-1} v_s$$

Mit

$$v_s = B^T v; P_{ss} = (B^T P^{-1} B)^{-1}$$

gilt:

$$v^T P v = v^T B^T (B^T P^{-1} B)^{-1} B v \quad (6.32)$$

Nachträgliche Berechnung der Verbesserungen  $v$  aus  $v_s$ :

Ansatz:

$$B^T v = v_s \quad (6.30)$$

$v_s$  = Sollwerte entsprechen  $w$  bed. Ausgleichung

## 6.6 Allgemeinfall

Bedingte Ausgleichung mit Unbekannten, Bedingungen zwischen Unbekannten

Ansatz:

$$\begin{aligned} f(\bar{l}, x) &= u \\ g(x) &= c \end{aligned} \tag{6.33}$$

nach Linearisierung:

$$\begin{aligned} B^T v + A \Delta x &= w \\ C^T \Delta x &= c \end{aligned} \tag{6.34}$$

Normalgleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} A & B^T P^{-1} B & 0 \\ 0 & A^T & C \\ C^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

## 6.7 Anwendungsbeispiele

### 6.7.1 Ausgleichende Gerade

$x, y$  fehlerbehaftet

$$\min \sum v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2$$

Ansatz:

$$y + v_y - a(x + v_x) - b = 0 \tag{6.35}$$

Linearisieren mit  $a_0, b_0, x_i, y_i$

$$\begin{aligned} v_{y_i} - a_0 v_{x_i} - x_i \Delta a - \Delta b &= a_0 x_i + b_0 - y_i \\ v_{y_{i+1}} - a_0 v_{x_{i+1}} - x_{i+1} \Delta a - \Delta b &= a_0 x_{i+1} + b_0 - y_{i+1} \end{aligned}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 - a_0 & & & \\ & 1 - a_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 - a_0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -x_1 - 1 \\ -x_2 - 1 \\ -x_3 - 1 \\ \vdots \\ -x_n - 1 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} a_0 x_1 + b_0 - y_1 \\ a_0 x_2 + b_0 - y_2 \\ a_0 x_3 + b_0 - y_3 \\ \vdots \\ a_0 x_n + b_0 - y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B^T P^{-1} B &= (1 - a_0)^2 \cdot E \\ (B^T P^{-1} B)^{-1} &= \frac{1}{(1 - a_0)^2} \cdot E \end{aligned}$$

Normalgleichungen:

$$A^T A \Delta x = A^T w \quad (6.36)$$

Bemerkung: Das gleiche Normalgleichungssystem erhält man auch aus Ansatz:

$$v_y = x \Delta a + a \Delta b - (y - x a_0 - b_0)$$

$$\min v_y^T v_y$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} Y_1 - x_1 a_0 - b_0 \\ Y_2 - x_2 a_0 - b_0 \\ \vdots \\ Y_n - x_n a_0 - b_0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A \Delta x = A^T l \quad (6.36)$$

**Anderer Ansatz:**

$$\begin{aligned} a(x + v_x) + b(y + v_y) + c &= 0 \\ a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.37)$$

(Allgemeinfall)

### 6.7.2 Ausgleichung von linearen Funktionen

geg.: Koordinaten  $x, y$  von auszugleichenden Punkten

ges.: Koeffizienten der ausgleichenden Geraden

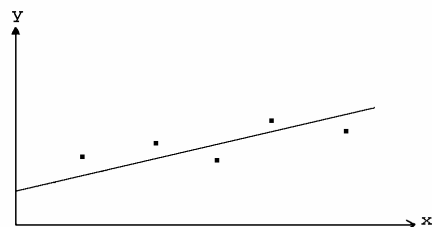


Abbildung 6.8: Ausgleichende Gerade

Ansätze: z.B.

$$\begin{aligned} 1) \quad y + v_y &= ax + b \\ 2) \quad y + v_y &= a(x + v_x) + b \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad a(x + v_x) + b(y + v_y) + c &= 0 \\ a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.39)$$

aus 3) Lösungsweg ohne Näherungswerte für Parameter: Hessesche Normalform

$$p = x_1 \cos \varepsilon + y_1 \sin \varepsilon \quad (6.40)$$

$\varphi$  = Winkel zwischen Gerade und  $x$  - Achse

$$\varepsilon = \varphi + 90^\circ : \cos \varepsilon = -\sin \varphi$$

$$\sin \varepsilon = -\cos \varphi$$

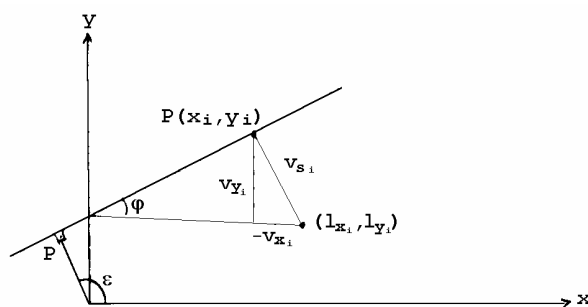


Abbildung 6.9: Winkel zwischen Gerade und x-Achse

in (6.40) eingesetzt:

$$p = -x_i \sin \varphi + y_i \cos \varphi \quad (6.41)$$

Übergang zu Beobachtungen:

$$p = -(l_{x_i} + v_{x_i}) \sin \varphi + (l_{y_i} + v_{y_i}) \cos \varphi \quad (6.42)$$

Umformung von (6.42):

$$p = -l_{x_i} \sin \varphi + l_{y_i} \cos \varphi + \underbrace{-v_{x_i} \sin \varphi + v_{y_i} \cos \varphi}_{v_{s_i}}$$

Damit:

$$v_{s_i} = p + l_{x_i} \sin \varphi - l_{y_i} \cos \varphi \quad (6.43)$$

Lösung:  $v_s^T v_s \rightarrow \min$ .

$$\begin{aligned} v_{s_i}^2 ] &= np^2 + 2p[l_{x_i}] \sin \varphi - 2p[l_{y_i}] \cos \varphi \\ &\quad - 2[l_{x_i} l_{y_i}] \sin \varphi \cos \varphi + [l_{x_i}^2] \sin^2 \varphi + [l_{y_i}^2] \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (6.44)$$

**Minimierung:**

$$\frac{\partial [v_{s_i}^2]}{\partial p} = 0 \Rightarrow 2np + 2[l_x] \sin \varphi - 2[l_y] \cos \varphi = 0$$

$$p = \frac{[l_y] \cos \varphi - [l_x] \sin \varphi}{n} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [v_{s_i}^2]}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow & 2p[l_x] \cos \varphi + 2p[l_y] \sin \varphi - 2[l_x l_y] (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ & + 2[l_x^2] \cos \varphi \sin \varphi - 2[l_y^2] \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{2}{n} ([l_y] \cos \varphi - [l_x] \sin \varphi) ([l_x] \cos \varphi + [l_y] \sin \varphi) - [l_x l_y] \cos 2\varphi \\
 &\quad + ([l_x^2] - [l_y^2]) \sin 2\varphi \\
 0 &= \frac{1}{n} ([l_x] [l_y] \cos 2\varphi + ([l_x]^2 - [l_y]^2) \sin 2\varphi) \\
 &\quad - [l_x l_y] \cos 2\varphi + ([l_x^2] - [l_y^2]) \sin 2\varphi \quad / \quad : \quad \cos 2\varphi \\
 0 &= ([l_x^2] - [l_y^2] - \frac{[l_x]^2 - [l_y]^2}{n}) \tan 2\varphi - ([l_x l_y] - \frac{1}{n} [l_x] [l_y]) \\
 \tan 2\varphi &= \frac{[l_x l_y] - \frac{1}{n} [l_x] [l_y]}{[l_x^2] - [l_y^2] - \frac{1}{n} ([l_x]^2 - [l_y]^2)} \tag{6.46}
 \end{aligned}$$

Vereinfachung von (6.46):

Aus (6.45) ist ablesbar: Die ausgleichende Gerade geht durch Schwerpunkt, weil bei Schwerpunktskoordinaten gilt:

$$[l_x] = 0, \quad [l_y] = 0, \quad p = 0$$

Übergang zu den Schwerpunktskoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \bar{l}_{x_i} &= l_{x_i} - \frac{[l_x]}{n} \\
 \bar{l}_{y_i} &= l_{y_i} - \frac{[l_y]}{n}
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Aus (6.47) folgt:

$$\begin{aligned}
 p &= 0 \\
 \tan 2\varphi &= \frac{[\bar{l}_x] - [\bar{l}_y]}{[\bar{l}_x^2] - [\bar{l}_y^2]}
 \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Schwerpunktsreduktion entspricht reduzierten Fehlergleichungen

**Fehlerrechnung:**

$$\begin{aligned}
 v_{s_i} &= \bar{l}_{x_i} \sin \varphi - \bar{l}_{y_i} \cos \varphi \tag{6.43} \\
 v_s v_s &= [\bar{l}_x^2] \sin^2 \varphi + [\bar{l}_y^2] \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi [\bar{l}_x \bar{l}_y]
 \end{aligned}$$

Nach Umformung:

$$[v_s v_s] = \frac{[\bar{l}_x] + [\bar{l}_y]}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{([\bar{l}_x] - [\bar{l}_y]) - 4[\bar{l}_x \bar{l}_y]}^2$$

bei + Maximum

bei - Minimum

Bemerkung:

Geraden stehen senkrecht aufeinander!

**Bestimmung von  $Q_{\varphi\varphi}$  und  $m_\varphi$ :**

Aus (6.43) mit Linearisierung:

$$v_{s_i} = (\bar{l}_{x_i} \cos \varphi_0 + \bar{l}_{y_i} \sin \varphi_0) \Delta\varphi - (\bar{l}_{y_i} \cos \varphi_0 - \bar{l}_{x_i} \sin \varphi_0)$$

$$(v = A\Delta\varphi - l)$$

$$Q_{\varphi\varphi} = \frac{1}{[a_i^2]} = \frac{1}{[\underbrace{(\bar{l}_{x_i} \cos \varphi_0 + \bar{l}_{y_i} \sin \varphi_0)^2}_{\text{Abstand des Punktes vom Schwerpunkt}}]}$$

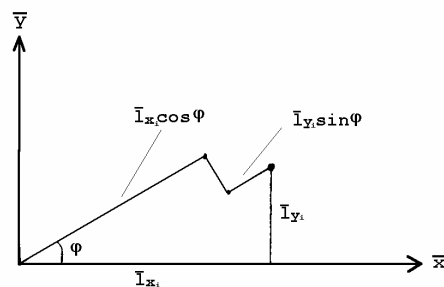


Abbildung 6.10:

$$Q_{vv} = Q_{11} - A Q_{xx} A^T$$

Diagonalelement  $Q_{vv_{ii}}$ :

$$Q_{vv_{ii}} = 1 - \frac{(\bar{l}_{x_i} \cos \varphi_0 + \bar{l}_{y_i} \sin \varphi_0)^2}{[(\bar{l}_{x_i} \cos \varphi_0 + \bar{l}_{y_i} \sin \varphi_0)^2]}$$

mit  $s_i = \bar{l}_{x_i} \cos \varphi_0 + \bar{l}_{y_i} \sin \varphi_0$ : Abstand vom Schwerpunkt

$$Q_{vv_{ii}} = 1 - \frac{s_i^2}{[s_i^2]}$$

Hieraus ist ablesbar, dass weit entfernte Punkte eine geringe Redundanz haben.

## 6.8 Helmertransformation

Bestimmung der Konstanten einer linearen Transformation

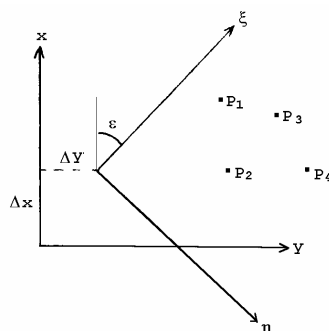


Abbildung 6.11:

Helmertransformation

geg.: Landeskoordinaten  $x, y$   
 örtliches Koordinatensystem  
 identische Punkte in beiden  
 Koordinatensystemen

ges.: Transformationsparameter

### 6.8.1 Lösungsansätze

$$\begin{aligned} x_i &= \Delta x + m(\xi_i \cos \varepsilon - \eta_i \sin \varepsilon) & a &= m \cos \varepsilon \\ y_i &= \Delta y + m(\eta_i \cos \varepsilon + \xi_i \sin \varepsilon) & b &= m \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (6.48)$$

1)  $x_i, y_i$  fehlerfrei

$$\begin{aligned} x_i &= \Delta x + m(\xi_i + v_{\xi_i}) \cos \varepsilon - m(\eta_i + v_{\eta_i}) \sin \varepsilon = \Delta x + a(\xi_i + v_{\xi_i}) - b(\eta_i + v_{\eta_i}) \\ y_i &= \Delta y + m(\eta_i + v_{\eta_i}) \cos \varepsilon + m(\xi_i + v_{\xi_i}) \sin \varepsilon = \Delta y + a(\eta_i + v_{\eta_i}) + b(\xi_i + v_{\xi_i}) \end{aligned}$$

Typ: bedingte Ausgleichung mit Unbekannten

2)  $\xi_i, \eta_i$  fehlerfrei

$$\begin{aligned} x_i + v_{x_i} &= \Delta x + \xi_i a - \eta_i b \\ y_i + v_{y_i} &= \Delta y + \eta_i a + \xi_i b \end{aligned}$$

Typ: vermittelnde Ausgleichung

3)  $x_i, y_i, \xi_i, \eta_i$  fehlerbehaftet

$$\begin{aligned} x_i + v_{x_i} - (\xi_i + v_{\xi_i})a + (\eta_i + v_{\eta_i})b - \Delta x &= 0 \\ y_i + v_{y_i} - (\eta_i + v_{\eta_i})a - (\xi_i + v_{\xi_i})b - \Delta y &= 0 \end{aligned}$$

Typ: bedingte Ausgleichung mit Unbekannten

**6.8.2 2. Ansatz: vermittelnde Ausgleichung**

$$v = Ax - l \tag{6.49}$$

Lineare Fehlergleichungen:

$$v = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ \vdots \\ v_{x_n} \\ v_{y_n} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \xi_1 & -\eta_1 & +1 & 0 \\ \eta_1 & \xi_1 & 0 & +1 \\ \xi_2 & -\eta_2 & +1 & 0 \\ \eta_2 & \xi_2 & 0 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & -\eta_n & +1 & 0 \\ \eta_n & \xi_n & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Normalgleichungen: P = E

$$A^T P A x = A^T P l$$

$$A^T P A = \begin{bmatrix} [\xi^2 + \eta^2] & 0 & [\xi] & [\eta] \\ & (N_{11}) & & (N_{12}) \\ (N_{11}) & [\xi^2 + \eta^2] & -[\eta] & [\xi] \\ & & n & 0 \\ & & & (N_{22}) \\ & & & n \end{bmatrix}$$

$$A^T P l = \begin{bmatrix} [\xi_x + \eta_y] \\ (h_1) \\ [\xi_y - \eta_x] \\ (h_2) \\ [x] \\ [y] \end{bmatrix}$$

Unterteilung von x in

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ mit } x_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Damit NGL-System:

$$\begin{aligned} N_{11}x_1 + N_{12}x_2 &= h_1 \\ N_{12}^T x_1 + N_{22}x_2 &= h_2 \end{aligned} \tag{6.50}$$



Elimination von  $x_2$ :

$$(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^T)x_1 = h_1 - N_{12}N_{22}^{-1}h_2$$

$$N_{22}^{-1} = \frac{1}{n} E ; \quad N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^T = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} [\xi]^2 + [\eta]^2 & 0 \\ 0 & [\xi]^2 + [\eta]^2 \end{bmatrix}$$

Reduziertes NGL-System:

$$\left\{ [\xi^2 + \eta^2] - \frac{1}{n} ([\xi]^2 + [\eta]^2) \right\} E \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\xi_x + \eta_y] - \frac{1}{n} ([\xi] [x] + [\eta] [y]) \\ [\xi_y - \eta_x] - \frac{1}{n} ([\xi] [y] - [\eta] [x]) \end{bmatrix}$$

Hieraus a,b:

$$x_2 = N_{22}^{-1}(h_2 - N_{12}^T x_1)$$

$$\Delta x = \frac{1}{n} ([x] - [\xi]a + [\eta]b) \tag{6.51}$$

$$\Delta y = \frac{1}{n} ([y] - [\eta]a - [\xi]b)$$

**Übergang zu Schwerpunkt-System:**

Ausnutzung von

$$A^T P v = 0 \quad \begin{cases} [vx] = 0 \\ [vy] = 0 \end{cases}$$

Damit Ansatz:

$$x_{s_i} + v_{x_i} = \xi_{s_i} a - \eta_{s_i} b$$

$$y_{s_i} + v_{y_i} = \eta_{s_i} a + \xi_{s_i} b$$

$$x_{s_i} = x_i - \frac{[x]}{n} \quad \xi_{s_i} = \xi_i - \frac{[\xi]}{n}$$

$$y_{s_i} = y_i - \frac{[y]}{n} \quad \eta_{s_i} = \eta_i - \frac{[\eta]}{n}$$

$$x_s = 0, \quad y_s = 0, \quad \xi_s = 0, \quad \eta_s = 0$$

Damit:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{[\xi_s^2 + \eta_s^2]} \cdot \begin{bmatrix} [\xi_s x_s + \eta_s y_s] \\ [\xi_s y_s - \eta_s x_s] \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = x_s - \xi_s a - \eta_s b$$

$$\Delta y = y_s - \eta_s a - \xi_s b$$

Redundanz:  $2n - 4$

**Kontrollen:**

$$v_x] = 0 \quad , \quad [v_y] = 0$$

$$v_x \xi_s] + [v_y \eta_s] = 0$$

$$v_x \eta_s] + [v_y \xi_s] = 0$$

$$m_0^2 = \frac{v^T P v}{2n - 4} \quad ; \quad v^T P v = l^T P l - x^T A^T P l$$

$$v^T P v = [x^2] + [y^2] - a([\xi_s x_s] + [\eta_s y_s]) - b([\xi_s y_s] - [\eta_s x_s])$$

**Genauigkeit:**

$$m_a^2 = m_0^2 \frac{1}{[\xi_s^2 + \eta_s^2]} = m_b^2 \tag{6.52}$$

$$m_a^2 = m_0^2 \frac{1}{[s_i^2]} = m_b^2 \quad s_i: \text{Schwerpunktsabstand}$$

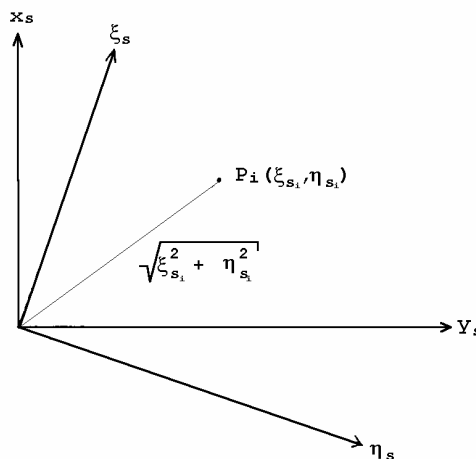


Abbildung 6.12: Schwerpunktsabstand

$$d(\Delta x) = -\xi_s da + \eta_s db$$

$$d(\Delta y) = -\eta_s da - \xi_s db$$

$$Q_{\Delta x \Delta x} = (\xi_s^2 + \eta_s^2) Q_{aa} \quad ; \quad m_{\Delta x}^2 = m_0^2 Q_{\Delta x \Delta x}$$

$$Q_{\Delta y \Delta y} = (\eta_s^2 + \xi_s^2) Q_{aa} \quad ; \quad m_{\Delta y}^2 = m_0^2 Q_{\Delta y \Delta y}$$

$$Q_{\Delta x \Delta y} = 0$$

$$Q_{vv} = Q_{11} - A Q_{xx} A^T$$

$$Q_{vv_{ii}} = 1 - \frac{s_i^2}{[s_i^2]}$$



## 7 Fehlerellipse und Fehlerellipsoid

### 7.1 Einführung und Problemstellung

Bei Ausgleichsproblemen, bei denen die Koordinaten von Neupunkten bestimmt werden, erhebt sich die Frage nach der **Genauigkeit** derselben. Präziser ausgedrückt heißt das: Welche mittleren Fehler haben die Koordinaten der Neupunkte? Diese können ermittelt werden, wenn die entsprechenden Kofaktoren bekannt sind.

$$\begin{aligned}
 m_0 &= \sqrt{\frac{[vvP]}{n-h}} \\
 m_x &= m_0 \sqrt{q_{xx}} \\
 m_y &= m_0 \sqrt{q_{yy}}
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

$m_x$  bzw.  $m_y$  sind die mittleren Fehler der Neupunktskoordinaten in Richtung der Koordinatenachsen.

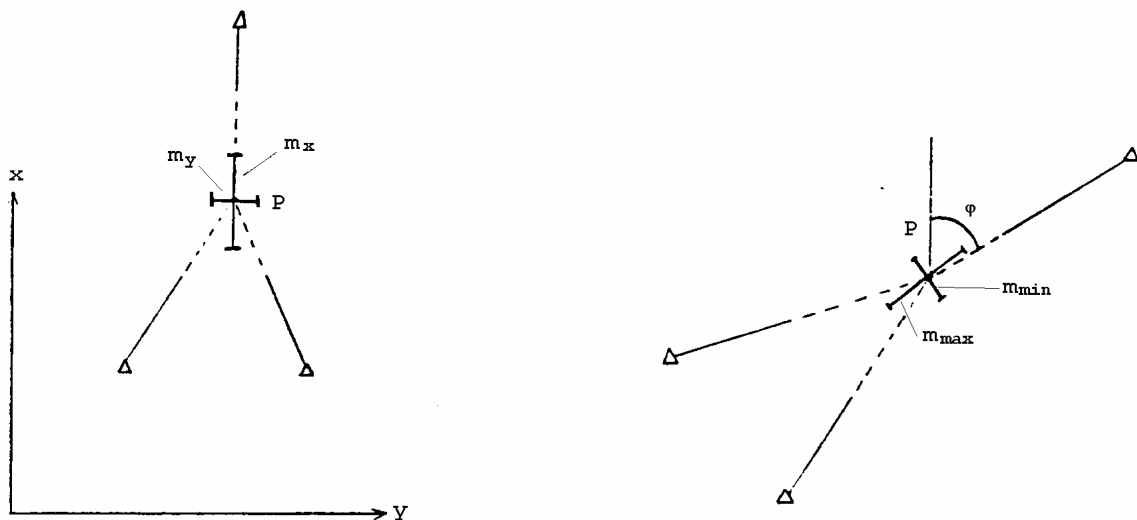


Abbildung 7.1: Vermutung der Richtung von  $m_{max}$  und  $m_{min}$  aufgrund der Netzkonfiguration

Diese Veranschaulichung wirft die folgende Fragestellung auf: Für welche Richtung wird der mittlere Fehler eines Punktes maximal bzw. minimal?

Damit gleichbedeutend ist die Betrachtung von  $m_x$  und  $m_y$  bzw. von  $m_u$  und  $m_t$  in einem um den Winkel  $\varphi$  gedrehten (u,t)-System.

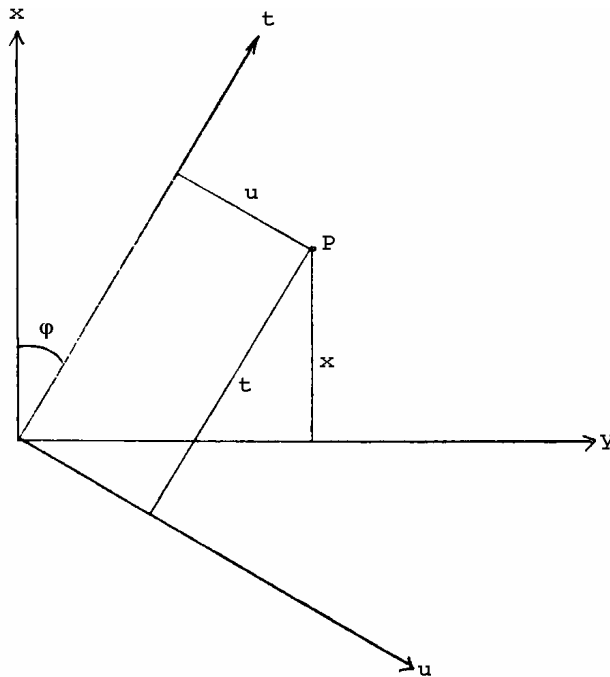


Abbildung 7.2: Rotation um  $\varphi$

Präzise werden folgende 2 Probleme formuliert und anschließend gelöst.

- Problem 1: Wie würden sich  $m_u$  und  $m_t$  ergeben, wenn man die Ausgleichung im um  $\varphi$  gedrehten (u,t)-System durchgeführt hätte?
- Problem 2: Gibt es ein spezielles (u,t)-System mit Drehwinkel  $\varphi = \theta$  derart, daß in diesem System  $m_u$  bzw.  $m_t$  extremal werden?

## 7.2 Lösung

zum Problem 1: Mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ermittle man für einen beliebigen Drehwinkel die Gewichtsreziproken.

$$\begin{aligned} q_{uu} &= f_1(q_{xx}, q_{xy}, q_{yy}) \\ q_{tt} &= f_2(q_{xx}, q_{xy}, q_{yy}) \\ q_{ut} &= f_3(q_{xx}, q_{xy}, q_{yy}) \end{aligned} \quad (7.2)$$

zum Problem 2: Man ermittle ein  $\varphi = \theta$  derart, dass  $q_{uu}$  bzw.  $q_{tt}$  maximal bzw. minimal werden.

Zur Aufstellung der Kofaktoren bezüglich eines um  $\varphi$  gedrehten Koordinatensystems setzen wir eine Koordinatentransformation an:

$$\begin{aligned} t &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ u &= y \cos \varphi - x \sin \varphi \end{aligned} \quad (7.3)$$

nach Differentiation:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \Delta x \cos \varphi + \Delta y \sin \varphi \\ \Delta u &= \Delta y \cos \varphi - \Delta x \sin \varphi\end{aligned}\quad (7.4)$$

und dem symbolischen Ansatz nach Tienstra:

$$\begin{aligned}q_t &= q_x \cos \varphi + q_y \sin \varphi \\ q_u &= q_y \cos \varphi - q_x \sin \varphi\end{aligned}\quad (7.5)$$

für die Kofaktoren:

$$\begin{aligned}q_{tt} &= q_{xx} \cos^2 \varphi + 2q_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + q_{yy} \sin^2 \varphi \\ q_{uu} &= q_{yy} \cos^2 \varphi - 2q_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + q_{xx} \sin^2 \varphi\end{aligned}\quad (7.6)$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$q_{tt} + q_{uu} = q_{xx} + q_{yy}\quad (7.7)$$

Nach Multiplikation mit  $m_0$  ergibt sich unabhängig vom Winkel  $\varphi$  bzw. für beliebiges  $\varphi$ :

$$m_t^2 + m_u^2 = m_x^2 + m_y^2 =: m_p^2\quad (7.8)$$

Die Größe  $m_p = \sqrt{m_t^2 + m_u^2} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ , die von  $\varphi$  unabhängig ist, definiert man als **mittleren Punktfehler**.

Für den noch ausstehenden gemischten Kofaktor  $q_{tu}$  ergibt sich:

$$q_{tu} = q_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (q_{yy} - q_{xx}) \sin \varphi \cos \varphi\quad (7.9)$$

nach trigonometrischer Umformung:

$$q_{tu} = \frac{1}{2} (q_{yy} - q_{xx}) \sin 2\varphi + q_{xy} \cos 2\varphi\quad (7.10)$$

Mit den Gleichungen (7.6) und (7.10) kann Problem 1 als gelöst angesehen werden. Die Bestimmung des Winkels  $\varphi = \theta$  wird nach den üblichen Methoden der Differentialrechnung gelöst (vgl. Höhere Mathematik, Minimum-Maximum-Aufgaben).

Die Differentiation von (7.6) nach der (einzigen) Variablen  $\varphi$  ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{dq_{tt}}{d\varphi} &= -2q_{xx} \cos \varphi \sin \varphi + 2q_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2q_{yy} \cos \varphi \sin \varphi \\ &= -(q_{xx} - q_{yy}) \sin 2\varphi + 2q_{xy} \cos 2\varphi\end{aligned}\quad (7.11)$$

Nullsetzen dieser Ableitung liefert für  $\varphi = \theta$  :

$$\tan 2\theta = \frac{2q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}} \quad (7.12)$$

Bemerkungen:

- a) Die Gleichung (7.12) liefert 2 um  $90^\circ$  verschiedene Winkel  $\theta$  . Dies wird klar, wenn man  $\tan 2\theta$  durch den identischen Ausdruck

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad (7.13)$$

ersetzt. Die dadurch entstehende quadratische Gleichung für  $\tan \theta$  liefert zwei Lösungen  $\tan \theta_1$  und  $\tan \theta_2$ , für die gilt:

$$\tan \theta_1 \tan \theta_2 = -1 \quad (7.14)$$

- b) Nach Multiplikation von (7.10) mit dem Faktor 2 ist die rechte Seite mit der rechten Seite von (7.11) identisch. Damit folgt mit (7.14):

$$q_{uu}(\varphi = \theta) = 0 \quad (7.15)$$

Die daraus zu ziehende Konsequenz lautet: Hätte man nur einen Neupunkt auszugleichen und würde man diesen Neupunkt in das um  $\theta$  gedrehte  $(u,t)$ -System ausgleichen, dann wäre die Matrix des zugehörigen Normalgleichungssystem eine Diagonalmatrix.

Für die weitere Betrachtung wird dieses spezielle, nämlich um den Winkel  $\theta$  gedrehte System als  $(\xi, \eta)$ -System bezeichnet.

Den Richtungswinkel im  $(\xi, \eta)$ -System zwischen  $\varphi$  und  $\theta$  bezeichnen wir mit  $\psi$  .

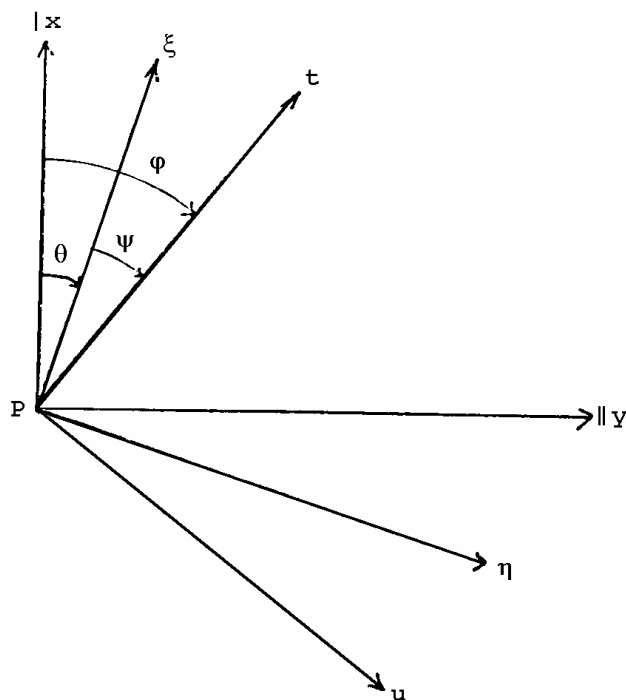


Abbildung 7.3: Richtungswinkel  $\psi$

Für die praktische Bestimmung von  $2\theta$  bzw.  $\theta$  ist die Festlegung des richtigen Quadranten eine wichtige Frage (vgl. Regeln der Vermessungskunde).

$2q_{xy}$	$q_{xx} - q_{yy}$	$2\theta$	$\theta$
$> 0$	$> 0$	$0 \text{ gon} < 2\theta < 100 \text{ gon}$	$0 \text{ gon} < \theta < 50 \text{ gon}$
$> 0$	$< 0$	$100 \text{ gon} < 2\theta < 200 \text{ gon}$	$50 \text{ gon} < \theta < 100 \text{ gon}$
$< 0$	$< 0$	$200 \text{ gon} < 2\theta < 300 \text{ gon}$	$100 \text{ gon} < \theta < 150 \text{ gon}$
$< 0$	$> 0$	$300 \text{ gon} < 2\theta < 400 \text{ gon}$	$150 \text{ gon} < \theta < 200 \text{ gon}$

### 7.3 Weitere Fragestellungen bzw. Verallgemeinerungen

Eine weitere Frage wäre z.B.: Was für eine spezielle Kurve ergibt sich, wenn man bei kontinuierlicher Winkeländerung  $\varphi$  die dazugehörigen Größen  $q_{tt}$  bzw.  $q_{uu}$  in Form einer Graphik aufträgt.

Wenn wir die bisher stillschweigend vorausgesetzte Tatsache, dass nämlich die Neupunkte aus einer ebenen Netzausgleichung hervorgegangen sind, dahingehend verallgemeinern, dass wir räumlich bestimmte Neupunkte zulassen (z.B. bei dreidimensionalen Netzen und beobachteten Zenitdistanzen oder bei Satellitennetzen), erhält man für jeden Neupunkt 6 verschiedene Kofaktoren:

$$q_{xx}, q_{yy}, q_{zz}, q_{xz}, q_{yz}, q_{xy}$$

und 3 verschiedene mittlere Fehler  $m_x, m_y$  und  $m_z$ . Man könnte wiederum die Frage stellen, wie groß die Kofaktoren  $q_{tt}, q_{uu}, q_{vv}$  bzw. die mittleren Fehler  $m_t, m_u, m_v$  in einem gedrehten (t,u,v)-System sind.

Dazu folgende Bemerkungen:

In der Ebene ist eine Drehung des (u,t)-Systems gegenüber einem (x,y)-System durch einen Winkel  $\varphi$  beschreibbar. Dagegen kann die Drehung bzw. Lagerung zweier räumlicher Systeme nur durch mindestens drei Winkel (Eulersche Winkel) beschrieben werden, z.B. in der Photogrammetrie durch die Winkel  $\varphi, \omega, \kappa$ . Eine andere Möglichkeit wäre, daß man die Winkel zwischen jeweils ursprünglicher und gedrehter Achse bzw. zwischen jeder gedrehten und allen ursprünglichen Koordinatenachsen angibt. Die sind dann jeweils 9 Winkel, welche allerdings gegenseitig nicht unabhängig sind, da bereits 3 Eulersche Winkel ausreichen.

Wenn man analog zu oben das Fehlerfortpflanzungsgesetz anwendet und dann entsprechend (7.11) zur Bestimmung der Extremwerte differenziert, muss man mindestens nach 3 Variablen partiell differenzieren und erhält 3 der Gleichung (7.12) entsprechende Gleichungen, die 3 ausgezeichnete Eulersche Winkel für ein ausgezeichnetes räumliches Koordinatensystem ergeben. Dies führt zu praktisch unüberwindlichen „formalalgebraischen Schwierigkeiten. Man erhält keine brauchbaren Formeln. Dies motiviert einen prinzipiell anderen Ansatz für unser Problem, welches dann beliebig verallgemeinert werden kann.

Ein solcher Ansatz führt auf ein Eigenwertproblem und erfordert die Theorie der linearen Algebra bzw. der Matrizenrechnung.

### 7.4 Herleitung mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren

Die folgende Herleitung, die sich des Matrizenkalküls bedient, wird zwar hier speziell für den zweidimensionalen Fall (ebene Netze) explizit vorgeführt, lässt sich aber sofort auf mehr Dimensionen (dreidimensional bei räumlichen Netzen) anwenden.



### 7.4.1 Allgemeiner Ansatz

Für jeden einzelnen Neupunkt führen wir ohne Beachtung einer Indizierung die Kofaktorenmatrix  $\mathbf{Q}$  und einen Vektor  $\mathbf{f}$  ein.

Es seien:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{yx} & q_{yy} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Mit (7.16) kann (7.6) als quadratische Form geschrieben werden:

$$q_u = \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{f} \quad (7.17)$$

In dieser Schreibweise werden nun die Extremwerte dieser quadratischen Form in Abhängigkeit des Vektors  $\mathbf{f}$  und nicht mehr „direkt“ in Abhängigkeit der skalaren Winkelgröße  $\varphi$ , d.h. in Abhängigkeit eines Vektors, dessen Elemente  $(\sin \varphi, \cos \varphi)$  nicht gegenseitig unabhängig sind, sondern durch die Nebenbedingung  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  verknüpft sind. Diese Nebenbedingung lautet in Vektorschreibweise:

$$\mathbf{f}^T \mathbf{f} = 1 \quad (7.18)$$

Die Gleichung (7.17) und (7.18) stellen also ein Extremwertproblem mit quadratischer Nebenbedingung dar. Solche Probleme führen im allgemeinen immer auf ein Eigenwertproblem.

Ein solches Extremwertproblem löst man nach Lagrange (Multiplikatorenmethode) durch Bildung der Lagrangefunktion  $F$  und Einführung des Lagrange'schen Multiplikators  $k$  wie folgt:

$$F = \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{f} - k(\mathbf{f}^T \mathbf{f} - 1) \quad (7.19)$$

Die Differentiation nach dem Vektor  $\mathbf{f}$  liefert:

$$\frac{dF}{d\mathbf{f}} = 2\mathbf{Q}\mathbf{f} - 2k\mathbf{f} \quad (7.20)$$

Aus:

$$\frac{dF}{d\mathbf{f}} = 0 \text{ folgt } \mathbf{Q}\mathbf{f} = k\mathbf{f} \quad (7.21)$$

bzw. die übliche Eigenwertgleichung:

$$(\mathbf{Q} - k\mathbf{E})\mathbf{f} = 0 \quad (7.22)$$

Dies ist ein homogenes Gleichungssystem, das genau dann nichttriviale Lösungen  $\mathbf{f}$  besitzt, wenn  $\text{Det}(\mathbf{Q} - k\mathbf{E}) = 0$  ist. Die Werte  $k$ , für die diese Bedingung gilt, nennt man Eigenwerte von  $\mathbf{Q}$ . Die dazugehörigen Lösungsvektoren  $\mathbf{f}$  von (7.22) heißen Eigenvektoren.

Da hier symmetrische Kofaktorenmatrizen vorliegen, die wir im folgenden als positiv definit voraussetzen, sind alle Eigenwerte reell und positiv. Außerdem gilt für den Rang der Koeffizientenmatrix  $\text{Rg}(\mathbf{Q} - k\mathbf{E}) = n - e$ , wobei  $n$  die Dimension von  $\mathbf{Q}$  ist und  $e$  die Vielfachheit des Eigenwertes  $k$ .

Weiteres sei bemerkt, dass die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren orthogonal sind. Die Bedingung:

$$\text{Det}(\mathbf{Q} - k\mathbf{E}) = 0 \quad (7.23)$$

für  $k$  liefert zur Bestimmung von  $k$  ein Polynom, dessen Grad durch die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten der quadratischen Matrix bestimmt ist.

Für den speziellen Fall, dass  $\mathbf{Q}$  eine  $(2 \times 2)$ -Matrix ist, haben wir im allgemeinen 2 Eigenwerte  $k_1$  und  $k_2$  bzw. 2 Eigenvektoren  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$ , wobei wir jetzt vereinbaren wollen, dass für  $k_1$  und  $\mathbf{f}_1$  die quadratische Form (7.17) ihr Maximum und für  $k_2$  und  $\mathbf{f}_2$  ihr Minimum annimmt.

Wir bezeichnen:

$$\begin{aligned} q_{u_{\max}} &:= q_{\xi\xi} = \mathbf{f}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_1 \\ q_{u_{\min}} &:= q_{\eta\eta} = \mathbf{f}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Aus (7.22) folgt somit:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{f}_1 = k_1 \mathbf{f}_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_2 = k_2 \mathbf{f}_2 \quad (7.25)$$

Nach Multiplikation mit  $\mathbf{f}_1^T$  bzw.  $\mathbf{f}_2^T$  von links ergibt sich unter Beachtung von (7.18):

$$\begin{aligned} k_1 &= \mathbf{f}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_1 = q_{\xi\xi} = q_{u_{\max}} \\ k_2 &= \mathbf{f}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_2 = q_{\eta\eta} = q_{u_{\min}} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Bemerkung: Die Größe  $\mathbf{f}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{f}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_1}$  nennt man *Raleigh-Quotient*.

### 7.4.2 Praktische Bestimmung der Eigenwerte

Für den hier speziell betrachteten zweidimensionalen Fall muss gelten:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} q_{xx} - k & q_{xy} \\ q_{yx} & q_{yy} - k \end{bmatrix} = 0 \quad (7.27)$$

Man erhält damit das sogenannte *charakteristische Polynom* für  $k$ :

$$k^2 - (q_{xx} + q_{yy})k + q_{xx}q_{yy} - q_{xy}^2 = 0 \quad (7.28)$$

Dieses besitzt im allgemeinen die beiden verschiedenen Lösungen:

$$\begin{aligned} k_1 &= q_{\xi\xi} = \frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(q_{xx} - q_{yy})^2 + 4q_{xy}^2} \\ k_2 &= q_{\eta\eta} = \frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(q_{xx} - q_{yy})^2 + 4q_{xy}^2} \end{aligned} \quad (7.29)$$

### 7.4.3 Praktische Bestimmung der Eigenvektoren

Es sei  $\varphi = \theta$  der zum Maximum von  $q_u$ , d.h. der zu  $k_1$  bzw.  $\mathbf{f}_1$  gehörige Winkel. Dann gilt für die beiden zueinander orthogonalen Eigenvektoren  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} = [f_{11} \quad f_{12}] \\ \mathbf{f}_2^T &= [\cos(\theta + 90^\circ) \quad \sin(\theta + 90^\circ)] = [f_{21} \quad f_{22}]\end{aligned}\quad (7.30)$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren bzw. zur Bestimmung von  $\cos \theta$  und  $\sin \theta$  setzen wir den maximalen Eigenwert  $k_1$  in (7.22) ein und lösen das homogene Gleichungssystem  $\mathbf{Q}\mathbf{f}_1 - k_1\mathbf{f}_1 = 0$  explizit:

$$(q_{xx} - k_1)\cos \theta + q_{xy}\sin \theta = 0 \quad (7.31)$$

$$q_{xy}\cos \theta + (q_{yy} - k_1)\sin \theta = 0 \quad (7.32)$$

Da dieses homogene Gleichungssystem nach Voraussetzung eine verschwindende Koeffizientendeterminante besitzt ( $k_1$  wurde ja gerade so bestimmt), sind beide Gleichungen voneinander linear abhängig und es genügt, im folgenden nur eine Gleichung zu betrachten.

Aus (7.31) folgt:

$$\tan \theta = \frac{k_1 - q_{xx}}{q_{xy}} \quad (7.33)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

erhält man nach kurzer Umformung:

$$\sin \theta = \frac{k_1 - q_{xx}}{\sqrt{(k_1 - q_{xx})^2 + q_{xy}^2}} \quad (7.34)$$

$$\cos \theta = \frac{q_{xy}}{\sqrt{(k_1 - q_{xx})^2 + q_{xy}^2}} \quad (7.35)$$

In gleicher Weise erhält man die zur Bestimmung von  $\mathbf{f}_2$  gehörigen Größen  $\sin(\theta + 90^\circ)$  und  $\cos(\theta + 90^\circ)$ , man muss nur in (7.34) und (7.35) wegen der Orthogonalität der Eigenvektoren den kleineren Eigenwert  $k_2$  einsetzen.

Bemerkungen:

- a) Die gleichen Ergebnisse erhält man auch, wenn man die Gleichung (7.32) verwendet, allerdings wegen:

$$\tan \theta = \frac{q_{xy}}{k_1 - q_{yy}} \quad (7.36)$$

in Abhängigkeit von  $q_{yy}$ .

b) Durch Übergang von  $\theta$  auf den doppelten Winkel  $2\theta$  kann aus (7.36) nach einigen Umformungen die früher hergeleitete Formel (7.12) abgeleitet werden.

## 7.5 Geometrische Deutung der bisherigen Ergebnisse (ebener Fall)

Der hierzu notwendige zentrale Begriff ist die **Hauptachsentransformation** einer quadratischen Form auf das System der Eigenvektoren.

### 7.5.1 Hauptachsentransformation

Bisher wurden folgende Koordinatensysteme verwendet:

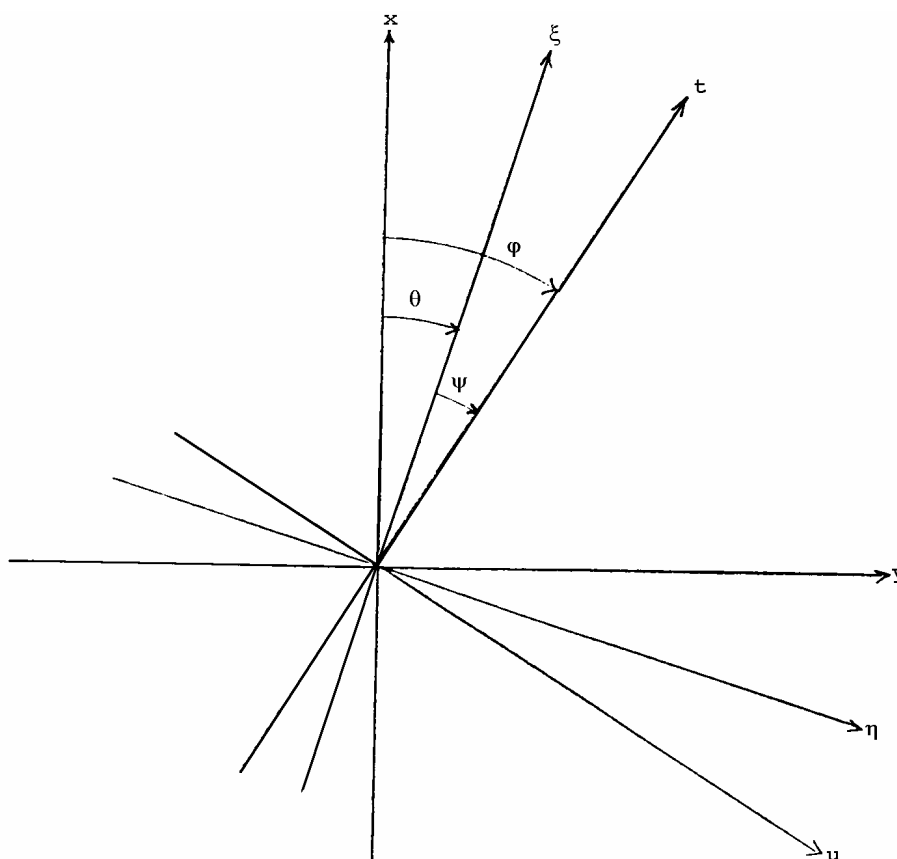


Abbildung 7.4: Koordinatensysteme

Für  $q_{ii}$  haben wir nach (7.6) eine quadratische Form folgender Bauart:

$$q_{ii} = f(q_{xx}, q_{yy}, q_{xy}, \sin \varphi, \cos \varphi) \quad (7.37)$$

Gewünscht ist nun die Quadratische Form derart, dass in dem um  $\theta$  gedrehten  $(\xi, \eta)$ -System der Kofaktor  $q_{\xi\eta}$  verschwindet. Die gewünschte Bauart der quadratischen Form lautet dann:

$$q_{ii} = g(q_{\xi\xi}, q_{\eta\eta}, \sin \psi, \cos \psi) \quad (7.38)$$

Diese so vorgeschriebene Transformation entspricht der sogenannten Hauptachsentransformation in das System der Eigenvektoren  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$ , welche dann gerade in die  $\xi$ - bzw.  $\eta$ - Achse fallen. Dies soll hier mit Hilfe einer Koordinatentransformation explizit abgeleitet werden.

Aus obiger Figur entnehmen wir:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos(\theta + \psi) = \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi \\ \sin \varphi &= \sin(\theta + \psi) = \sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi\end{aligned}\quad (7.39)$$

Mit den zunächst eingeführten Vektoren und Matrizen schreiben wir (7.39) als Matrixgleichung. Es seien

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} & \mathbf{f}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + 90^\circ) \\ \sin(\theta + 90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} & \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} & \text{und} & \mathbf{X} = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7.40)$$

wobei die Matrix  $\mathbf{X}$  als **Modalmatrix** bezeichnet wird. Mit den Bezeichnungen (7.40) kann (7.39) wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{f} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{t} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f}^T = \mathbf{t}^T \mathbf{X}^T \quad (7.41)$$

Einsetzen von (7.41) in die ursprüngliche quadratische Form (7.17) liefert:

$$q_u = \mathbf{t}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{t} \quad (7.42)$$

Nun ist aber nach der Eigenwerttheorie die Matrix  $\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X}$  eine Diagonalmatrix, in der die Eigenwerte von  $\mathbf{Q}$  stehen.

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & q_{\eta\eta} \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

Damit nimmt  $q_u$  die gewünschte Form an, nämlich:

$$q_u = \mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t} \quad (7.44)$$

Ausführlich geschrieben lautet (7.44):

$$\begin{aligned}q_u &= q_{\xi\xi} \cos^2 \psi + q_{\eta\eta} \sin^2 \psi \\ \sqrt{q_u} &= \sqrt{q_{\xi\xi} \cos^2 \psi + q_{\eta\eta} \sin^2 \psi}\end{aligned}\quad (7.45)$$

Wegen des Zusammenhanges zwischen Kofaktor und mittlerem Fehler ( $m_t = m_0 \sqrt{q_u}$ ;  $m_\xi = m_0 \sqrt{q_{\xi\xi}}$ ;  $m_\eta = m_0 \sqrt{q_{\eta\eta}}$ ) kann man von den Gewichtsreziproken auf die mittleren Fehler übergehen und erhält:

$$\begin{aligned}m_t^2 &= m_\xi^2 \cos^2 \psi + m_\eta^2 \sin^2 \psi \\ m_t &= \sqrt{m_\xi^2 \cos^2 \psi + m_\eta^2 \sin^2 \psi}\end{aligned}\quad (7.46)$$

Bemerkungen:

Die hier für den 2-dimensionalen Fall explizit hergeleiteten Formeln gelten, soweit sie als Matrixgleichungen angegeben wurden, allgemein für jede beliebige Dimension.

Die Modalmatrix ist orthogonal, d.h.  $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$  besitzt als Spaltenvektoren die orthonormierten Eigenvektoren.

### 7.5.2 Geometrische Deutung

Die durch die Gleichungen (7.45) und (7.46) angegebenen Formeln für  $q_u$  bzw.  $m_t$  lassen sich geometrisch deuten.

Die Größen  $\sqrt{q_u}$  bzw.  $m_t$  lassen als Längen von Radiusvektoren einer Ellipse mit den beiden Halbachsen  $\sqrt{q_{\xi\xi}}, \sqrt{q_{\eta\eta}}$  entsprechend (7.45) bzw.  $m_\xi, m_\eta$  entsprechend (7.46) deuten.

Diese Ellipse heißt dann **Fehlerellipse**. Das entsprechende Ellipsoid im 3-dimensionalen Fall heißt **Fehlerellipsoid**.

- a) Konstruktion von  $\sqrt{q_u}$  über affine Eigenschaften der Ellipse:

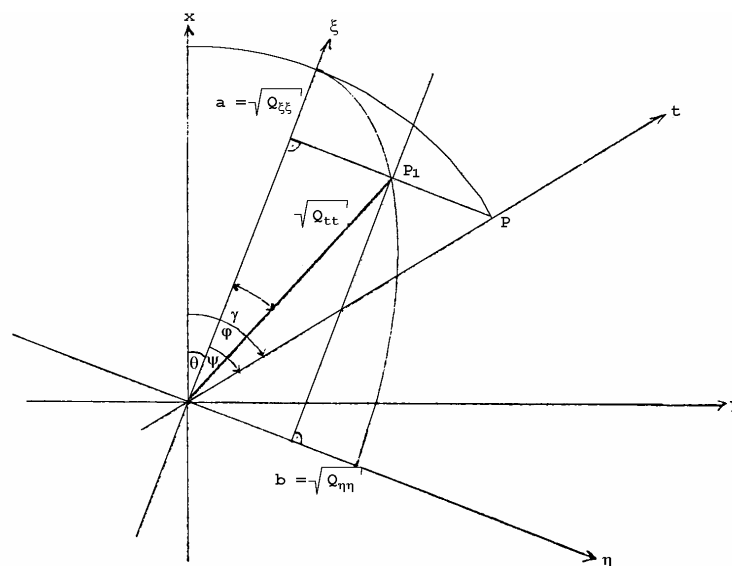


Abbildung 7.5: Konstruktion von  $\sqrt{q_u}$

b) Konstruktion von  $m_t$  über affine Eigenschaften der Ellipse (in Analogie zu a):

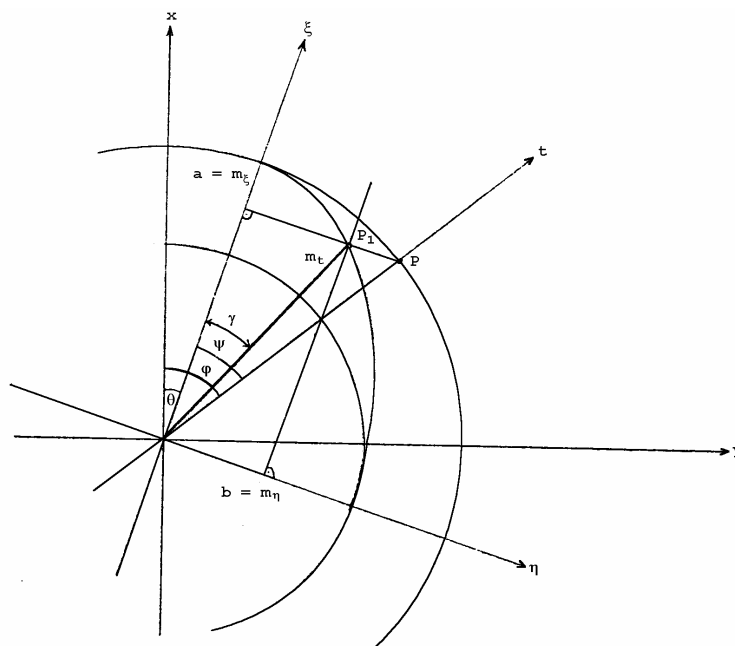


Abbildung 7.6: Konstruktion von  $m_t$

Beweis, dass für die Ellipsen mit  $a = \sqrt{q_{\xi\xi}}$ ,  $b = \sqrt{q_{\eta\eta}}$  bzw.  $a = m_\xi$ ,  $b = m_\eta$  die Länge des Radiusvektors  $\overline{OP_1}$  gleich  $\sqrt{q_{tt}}$  bzw.  $m_t$  ist.

Fall b)

Fall a)

$P_1$  hat die Koordinaten

$P_1$  hat die Koordinaten

$$\begin{aligned}\xi_{P_1} &= m_\xi \cos \psi \\ \eta_{P_1} &= m_\xi \sin \psi \frac{m_\eta}{m_\xi} = m_\eta \sin \psi \\ \overline{OP_1} &= \sqrt{\xi_{P_1}^2 + \eta_{P_1}^2} \\ &= \sqrt{m_\xi^2 \cos^2 \psi + m_\eta^2 \sin^2 \psi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{P_1} &= \sqrt{q_{\xi\xi}} \cos \psi \\ \eta_{P_1} &= \sqrt{q_{\xi\xi}} \sin \psi \frac{\sqrt{q_{\eta\eta}}}{\sqrt{q_{\xi\xi}}} \\ \overline{OP_1} &= \sqrt{\xi_{P_1}^2 + \eta_{P_1}^2} \\ &= \sqrt{q_{\xi\xi} \cos^2 \psi + q_{\eta\eta} \sin^2 \psi}\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit den Formeln (7.45) und (7.46).

Praktisches Vorgehen bei der zeichnerischen Bestimmung von  $\sqrt{q_{tt}}$  bzw.  $m_t$  bei zuvor berechneten Werten für  $\theta$ ,  $q_{\xi\xi}$  und  $q_{\eta\eta}$ .

Man zeichne eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = \sqrt{q_{\xi\xi}}$  und  $b = \sqrt{q_{\eta\eta}}$  und dem Richtungswinkel  $\theta$  der großen Halbachse  $a$  (im Neupunkt).





Allgemeine Skizze einer Fußpunktkurve:

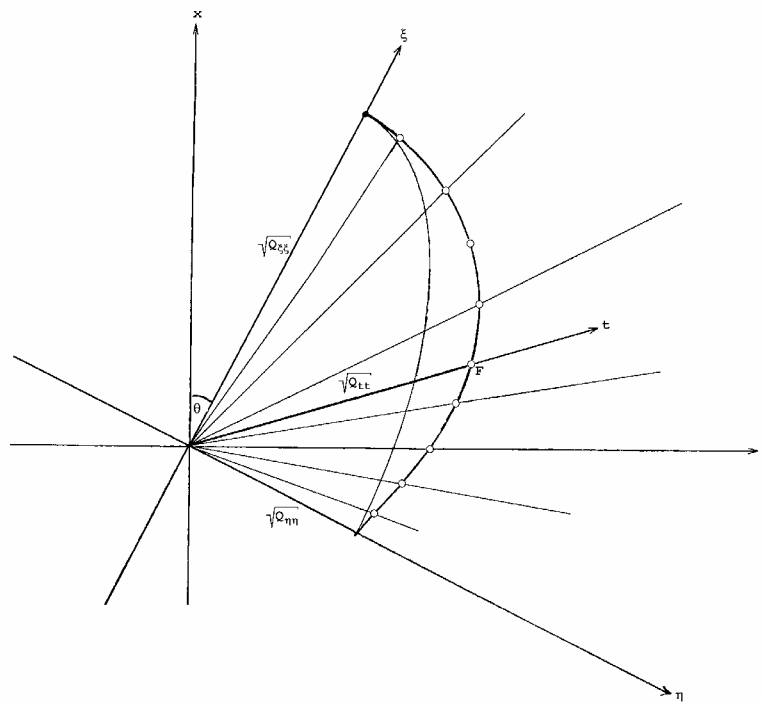


Abbildung 7.8: Allgemeine Skizze einer Fußpunktkurve

Für die 2 mal affine Richtung E gilt:

$$\tan E = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} \tan \psi = \frac{b^2}{a^2} \tan \psi \quad (7.48)$$

Beweis der beiden Behauptungen a) und b):

Um den Beweis führen zu können, werden zunächst einige mathematische Hilfsmittel bereitgestellt.

Zunächst folgende z.T. schon früher benutzte Bezeichnungen:

$$a = \sqrt{q_{\xi\xi}} = \sqrt{k_1} \quad \text{große Halbachse der Fehlerellipse}$$

$$b = \sqrt{q_{\eta\eta}} = \sqrt{k_2} \quad \text{kleine Halbachse der Fehlerellipse}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} \text{ ist Einheitsvektor, d.h. } \mathbf{t}^T \mathbf{t} = 1$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{Radiusvektor eines Ellipsenpunktes P mit den Koordinaten } \xi, \eta.$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix} \quad (7.49)$$

Damit gilt:

$$q_{tt} = \mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{q_{tt}} = \sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}} \quad (7.50)$$

Einige Formeln zur Fehlerellipse:

Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

bzw.

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}^{1/2} \cdot \mathbf{t} \quad (7.52)$$

Achsen Gleichung:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} = 1 \quad (7.53)$$

Der Vektor der Ellipsennormalen im Punkt  $P(\xi, \eta)$  sei  $\mathbf{u}$ , dann gilt durch Gradientenbildung von (7.53):

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} \quad (7.54)$$

Projektion  $p$  des Ortsvektors eines Ellipsenpunktes  $P$  in Richtung der Normalen:

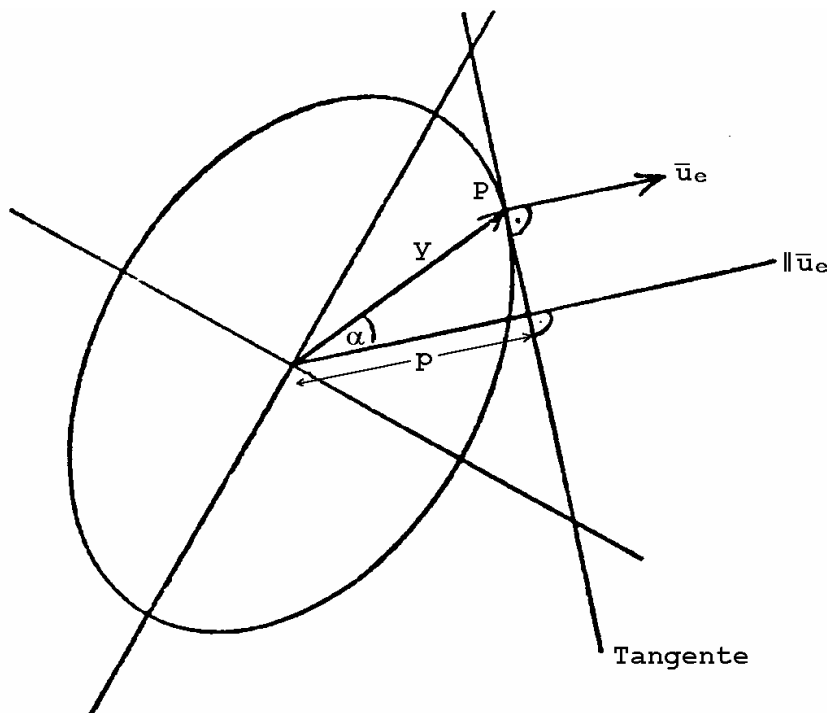


Abbildung 7.9 Projektion  $P$  des Ortsvektors eines Ellipsenpunktes  $P$  in Richtung der Normalen

Ist  $\mathbf{u}_e$  der Einheitsvektor der Ellipsennormalen im Punkt  $y$ , so gilt für den senkrechten Abstand  $p$  der Tangente bzw. Tangentialebene vom Ursprung:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{u}_e = |\mathbf{y}| \cdot |\mathbf{u}_e| \cdot \cos \alpha = p \quad (7.55)$$

Will man in Gleichung (7.54)  $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{y}$  an Stelle des Vektors  $\mathbf{u}$ , dessen Länge noch unbestimmt ist, den Einheitsvektors  $\mathbf{u}_e$  stehen haben, so kann man setzen:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}_e \quad (\lambda \neq 0) \quad (7.56)$$

wobei  $\lambda$  zunächst noch unbekannt ist. Gleichung (7.56) in (7.54) eingesetzt ergibt:

$$\mathbf{u}_e = \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} \quad (7.57)$$

Skalare Multiplikation mit  $\mathbf{y}^T$  von links ergibt:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{u}_e = \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} \quad (7.58)$$

Unter Beachtung von (7.55) und (7.53) erhält man:

$$\begin{aligned} p &= \lambda \\ \mathbf{u}_e &= p \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (7.59)$$

Seien  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  die zu der Richtung  $t$  und den Punkten  $y_1$ ,  $y_2$  gehörenden Einheitsvektoren, die im  $(\xi, \eta)$ -System die Richtungswinkel  $\Psi, \Gamma, E$  haben.

Mit diesen obigen Hilfsmitteln beweisen wir nun die Behauptungen a) und b):

- 1.Schritt: Man konstruiere den zur Richtung  $t$  gehörenden (affinen) Ellipsenpunkt  $P_1$  mit dem dazugehörigen Radiusvektor  $\mathbf{y}_1$ . Dann gilt nach (7.52):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{K}^{1/2} \mathbf{t} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y}_1^T = \mathbf{t}^T \mathbf{K}^{1/2} \\ \sqrt{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1} &= \sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}} = \sqrt{q_u} \end{aligned} \quad (7.60)$$

- 2.Schritt: Man konstruiere den zu  $P_1$  affinen Ellipsenpunkt  $P_2$  mit Radiusvektor  $\mathbf{y}_2$ . Wiederum gilt nach (7.52)

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{K}^{1/2} \mathbf{t}_1 \quad (7.61)$$

wobei  $\mathbf{t}_1$  der zu  $P_1$  gehörige Einheitsvektor ist. Für  $\mathbf{t}_1$  gilt:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{|\mathbf{y}_1|} = \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1}} = \frac{\mathbf{K}^{1/2} \mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}} \quad (7.62)$$

Dies in (7.61) eingesetzt liefert:

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{K} \mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}} \quad (7.63)$$

Für die Normalen in  $P_2$  gilt nach (7.54)  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}_2$ . Einsetzen von (7.63) liefert:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}} = \frac{\mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}} \quad (7.64)$$

$$\mathbf{u}_2 \parallel \mathbf{t}$$

Da die Ellipsentangente in  $P_2$  senkrecht auf der Normalen  $\mathbf{u}_2$  in  $P_2$  steht und  $\mathbf{u}_2 \parallel \mathbf{t}$  ist, folgt: die Tangente in  $P_2$  steht auch auf der Richtung  $\mathbf{t}$  selbst senkrecht oder  $P_2$  ist gerade derjenige Berührungspunkt der Tangente, die senkrecht auf der Richtung  $\mathbf{t}$  steht. Damit finden wir: Für die Projektion  $\overline{OF}$  von  $\mathbf{y}_t$  auf  $\mathbf{t}$  gilt dann:

$$\overline{OF} = p = \mathbf{t}^T \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}} = \sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}} = \sqrt{q_u}$$

also:

$$p = \sqrt{q_u} \tag{7.65}$$

was zu beweisen war.

Bemerkung:

Für den speziellen Fall gleicher Eigenwerte  $k_1 = k_2$ , wenn also  $q_{xx} = q_{yy}$  und  $q_{xy} = 0$  ist, entarten die Fehlerellipsen und die Fußpunktkurve in einen identischen Kreis mit dem Radius  $\sqrt{q_{xy}}$  bzw.  $m_x$ , d.h. in diesem Fall sind die mittleren Fehler in jeder beliebigen Richtung gleich groß.

## 8 Zur strengen Ausgleichung von Polygonzügen und Polygonnetzen

### 8.1 Voraussetzungen und Bezeichnungen

Behandelt wird der beidseitig angeschlossene Polygonzug. Gegeben seien dabei:

- Die Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes:

$$P_1(x_1, y_1) \quad P_n(x_n, y_n)$$

- Die Koordinaten der beiden Anschlußpunkte am Anfang und am Ende:

$$P_0(x_0, y_0) \quad P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Gemessen wurden:

- Alle Brechungswinkel

$$\beta_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

- Alle Strecken

$$s_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

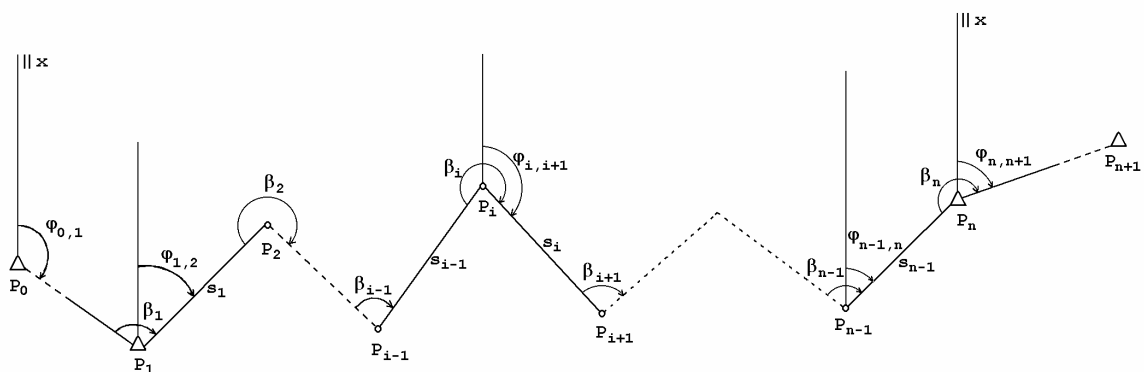


Abbildung 8.1: Beidseitig angeschlossener Polygonzug

## 8.2 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Bei der Ausgleichung eines Polygonzuges treten gegenüber der Ausgleichung von Strecken-, Richtungs- und Winkelbeobachtungen keine neuen Typen von Fehlergleichungen auf. Aus diesem Grunde werden nur noch die nichtlinearen Fehlergleichungen angegeben. Unbekannte sind dabei die Koordinaten der  $(n-2)$  unbekanntenen Polygonpunkte  $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ , d.h. also  $2(n-2)$  Unbekannte.

Die Fehlergleichungen lauten dann:

a) für die beobachteten Brechungswinkel:

$$\begin{aligned} \beta_1 + v_{\beta_1} &= \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \arctan \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\ &\vdots \\ \beta_i + v_{\beta_i} &= \arctan \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \arctan \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} \\ &\vdots \\ \beta_n + v_{\beta_n} &= \arctan \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \arctan \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Die ausgeglichenen Brechungswinkel werden als Differenzen von 2 Richtungswinkeln dargestellt. In der ersten Gleichung treten nur die Unbekannten  $x_2$  und  $y_2$  auf. In der  $i$ -ten Gleichung sind alle Koordinaten und in der  $n$ -ten Gleichung sind beide Koordinaten  $x_{n-1}$  und  $y_{n-1}$  unbekannt.

b) Für die beobachteten Strecken:

$$s_i + v_{s_i} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n, n-1) \quad (8.2)$$

mit jeweils den entsprechenden Unbekannten.

### Hinweise zur Fehlerrechnung:

Für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit (mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1) gilt:

$$\begin{aligned} m_0 &= \sqrt{\frac{\left[ v_{\beta_i} \quad v_{\beta_i} \quad p_{\beta_i} \right]_{i=1}^n + \left[ v_{s_i} \quad v_{s_i} \quad p_{s_i} \right]_{i=1}^{n-1}}{n + n - 1 - 2(n - 2)}} \\ m_0 &= \sqrt{\frac{\left[ v_{\beta_i} \quad v_{\beta_i} \quad p_{\beta_i} \right]_{i=1}^n + \left[ v_{s_i} \quad v_{s_i} \quad p_{s_i} \right]_{i=1}^{n-1}}{3}} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Bei der Festsetzung der Gewichte  $p_{\beta_i}$  und  $p_{s_i}$  muss darauf geachtet werden, dass es sich bei den beobachteten Winkeln und Strecken um sogenannte heterogene Größen handelt. Zur Ermittlung der Gewichte  $p_{\beta_i}$  und  $p_{s_i}$  müssen vor der Ausgleichung die mittleren Fehler  $m_{\beta_i}$  und  $m_{s_i}$  geschätzt werden. Wir machen die vereinfachende Annahme, dass die mittleren Fehler der Winkel und der Strecken für sich genommen jeweils gleich sind, dass also gilt:

$$\begin{aligned} m_{s_1}^2 &= m_{s_2}^2 = \dots = m_{s_{n-1}}^2 =: m_s^2 \\ m_{\beta_1}^2 &= m_{\beta_2}^2 = \dots = m_{\beta_n}^2 =: m_\beta^2 \end{aligned}$$

Nach der Definition der Gewichte gilt dann:

$$\frac{p_s}{p_\beta} = \frac{m_s^2}{m_\beta^2} \quad (8.4)$$

wobei ein Gewicht zu 1 gesetzt werden kann.

### 8.3 Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen

#### 8.3.1 Die Wahl eines Hauptsystems und Bestimmung der überschüssigen Beobachtungen

Gesamtanzahl der Beobachtungen:  $n + n - 1 = 2n - 1$ .

Anzahl der zur eindeutigen Festlegung der Konfiguration notwendigen Beobachtungen (ausgehend von  $P_1$ ):

$$\beta_1, s_1, \beta_2, s_2, \dots, \beta_{n-2}, s_{n-2}$$

d.h.  $2(n - 2) = 2n - 4$  Beobachtungen.

Überschüssig sind dann  $r = 2n - 1 - (2n - 4) = 3$  Beobachtungen, nämlich:

$$\beta_{n-1}, s_{n-1}, \beta_n.$$

Insgesamt sind also 3 Bedingungsgleichungen aufzustellen.

Bei diesem Beispiel empfiehlt es sich, die Bedingungsgleichungen **nicht** sukzessiv, d.h. durch Hinzufügung jeweils einer überschüssigen Beobachtung zum HS, aufzustellen. Dies wäre umständlich, da man die unbekanntenen Koordinaten der unbekanntenen Polygonpunkte mitführen müsste. Man geht deshalb wie in der Vermessungskunde vor und stellt die folgenden 3 Bedingungsgleichungen auf:

- a) Winkelabschlussbedingung
  - b) Koordinatenabschlussbedingung in x-Richtung
  - c) Koordinatenabschlussbedingung in y-Richtung
- zu a)

$$\begin{aligned} \varphi_{0,1} + (\beta_1 + v_{\beta_1}) - 200^{\text{gon}} + \dots + (\beta_n + v_{\beta_n}) - 200^{\text{gon}} &= \varphi_{n,n+1} \\ \Rightarrow v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_n} &= \underbrace{\varphi_{n,n+1} - \varphi_{0,1} + n \cdot 200^{\text{gon}}}_{\text{"Soll"}} - \underbrace{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)}_{\text{"Ist"}} =: w_1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

zu b) und c)

Für die ausgeglichenen Strecken und Winkel muss gelten:

$$x_1 + (s_1 + v_{s_1}) \cos \bar{\varphi}_{1,2} + (s_2 + v_{s_2}) \cos \bar{\varphi}_{2,3} + \dots + (s_{n-1} + v_{s_{n-1}}) \cos \bar{\varphi}_{n-1,n} = x_n \quad (8.6)$$

bzw.

$$y_1 + (s_1 + v_{s_1}) \sin \bar{\varphi}_{1,2} + (s_2 + v_{s_2}) \sin \bar{\varphi}_{2,3} + \dots + (s_{n-1} + v_{s_{n-1}}) \sin \bar{\varphi}_{n-1,n} = y_n \quad (8.7)$$

Man muss beachten, dass die ausgeglichenen Richtungswinkel  $\bar{\varphi}_{k,k+1}$  von den ausgeglichenen Brechungswinkeln abhängen.

So gilt z.B.:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_{1,2} &= \bar{\varphi}_{0,1} + \beta_1 + v_{\beta_1} - 200^{\text{gon}} \\
 \bar{\varphi}_{2,3} &= \bar{\varphi}_{0,1} + \beta_1 + v_{\beta_1} + \beta_2 + v_{\beta_2} - 2 \cdot (200^{\text{gon}}) \\
 &\vdots \\
 \bar{\varphi}_{n-1,n} &= \bar{\varphi}_{0,1} + \beta_1 + v_{\beta_1} + \dots + \beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}} - (n-1) \cdot (200^{\text{gon}})
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Da dadurch die beiden Koordinatenabschlussbedingungen, ausgedrückt durch die ursprünglichen Beobachtungen, ziemlich unübersichtlich werden, geht man den folgenden Weg:

Man fasst die unausgeglichenen Richtungswinkel:

$$\varphi_{k,k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

als Beobachtungen auf und substituiert die ausgeglichenen Brechungswinkel erst am Schluss wieder.

Zunächst sollen aber die Widersprüche  $w_2$  und  $w_3$  der Gleichungen (8.6) und (8.7) ausführlich angeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 w_2 &= x_n - x_1 - (s_1 \cos \phi_{1,2} + s_2 \cos \phi_{2,3} + \dots + s_{n-1} \cos \phi_{n-1,n}) \\
 &= \text{" Soll" } - \text{" Ist" } \\
 w_3 &= y_n - y_1 - (s_1 \sin \phi_{1,2} + s_2 \sin \phi_{2,3} + \dots + s_{n-1} \sin \phi_{n-1,n})
 \end{aligned}$$

mit den unausgeglichenen Richtungswinkeln:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{1,2} &= \varphi_{0,1} + \beta_1 - 200^{\text{gon}} \\
 \varphi_{2,3} &= \varphi_{0,1} + \beta_1 + \beta_2 - 2 \cdot (200^{\text{gon}}) \\
 &\vdots \\
 \varphi_{n-1,n} &= \varphi_{0,1} + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} - (n-1) \cdot (200^{\text{gon}})
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Entsprechend der vorübergehend gemachten Annahme, nämlich dass die unausgeglichenen Richtungswinkel beobachtet worden seien, gilt folgender Ansatz:

$$\begin{aligned}
 x_1 + (s_1 + v_{s_1}) \cos(\varphi_{1,2} + v_{\varphi_{1,2}}) + \dots + (s_{n-1} + v_{s_{n-1}}) \cos(\varphi_{n-1,n} + v_{\varphi_{n-1,n}}) &= x_n \\
 y_1 + (s_1 + v_{s_1}) \sin(\varphi_{1,2} + v_{\varphi_{1,2}}) + \dots + (s_{n-1} + v_{s_{n-1}}) \sin(\varphi_{n-1,n} + v_{\varphi_{n-1,n}}) &= y_n
 \end{aligned}$$

Nach der Linearisierung

$$\begin{aligned}
 \cos(\varphi_{i,k} + v_{\varphi_{i,k}}) &= \cos \varphi_{i,k} - \sin \varphi_{i,k} \cdot v_{\varphi_{i,k}} \\
 \sin(\varphi_{i,k} + v_{\varphi_{i,k}}) &= \sin \varphi_{i,k} + \cos \varphi_{i,k} \cdot v_{\varphi_{i,k}}
 \end{aligned}$$

erhält man nach Umordnen und Zusammenfassen bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}
 &\cos \varphi_{1,2} \cdot v_{s_1} + \cos \varphi_{2,3} \cdot v_{s_2} + \dots + \cos \varphi_{n-1,n} \cdot v_{s_{n-1}} \\
 &\underbrace{-s_1 \sin \varphi_{1,2}}_{y_2 - y_1} \cdot v_{\varphi_{1,2}} - \underbrace{s_2 \sin \varphi_{2,3}}_{y_3 - y_2} \cdot v_{\varphi_{2,3}} - \dots - \underbrace{s_{n-1} \sin \varphi_{n-1,n}}_{y_n - y_{n-1}} \cdot v_{\varphi_{n-1,n}} = w_2 \tag{8.10}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sin \varphi_{1,2} \cdot v_{s_1} + \sin \varphi_{2,3} \cdot v_{s_2} + \dots + \sin \varphi_{n-1,n} \cdot v_{s_{n-1}} + \underbrace{s_1 \cos \varphi_{1,2}}_{x_2 - x_1} \cdot v_{\varphi_{1,2}} \\ & + \underbrace{s_2 \cos \varphi_{2,3}}_{x_3 - x_2} \cdot v_{\varphi_{2,3}} + \dots + \underbrace{s_{n-1} \cos \varphi_{n-1,n}}_{x_n - x_{n-1}} \cdot v_{\varphi_{n-1,n}} = w_3 \end{aligned} \quad (8.11)$$

Mit den Vektoren und Matrizen:

$$\begin{aligned} v_s^T &= [v_{s_1} \quad v_{s_2} \quad \dots \quad v_{s_i} \quad \dots \quad v_{s_{n-1}}] \\ v_\varphi^T &= [v_{\varphi_1} \quad v_{\varphi_2} \quad \dots \quad v_{\varphi_i} \quad \dots \quad v_{\varphi_{n-1}}] \\ w^T &= [w_2 \quad w_3] \\ B_1^T &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_{1,2} & \cos \varphi_{2,3} & \dots & \cos \varphi_{i,i+1} & \dots & \cos \varphi_{n-1,n} \\ \sin \varphi_{1,2} & \sin \varphi_{2,3} & \dots & \sin \varphi_{i,i+1} & \dots & \sin \varphi_{n-1,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\bar{B}_2^T = \begin{bmatrix} -(y_2 - y_1) & -(y_3 - y_2) & \dots & -(y_{i+1} - y_i) & \dots & -(y_n - y_{n-1}) \\ (x_2 - x_1) & (x_3 - x_2) & \dots & (x_{i+1} - x_i) & \dots & (x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix}^* )$$

gehen die Gleichungen (8.10) und (8.11) über in:

$$B_1^T v_s + \bar{B}_2^T v_\varphi = w \quad (8.12)$$

Jetzt erfolgt der Übergang von Richtungswinkeln zu Brechungswinkeln (Rücksubstitution).

Durch Vergleich von (8.8) und (8.9) findet man mit:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{k,k+1} &= \varphi_{k,k+1} + v_{\varphi_{k,k+1}} \\ v_{\varphi_{k,k+1}} &= \sum_{i=1}^k v_{\beta_i} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Mit

$$v_\beta^T = [v_{\beta_1} \quad v_{\beta_2} \quad \dots \quad v_{\beta_{n-1}}]$$

und der  $(n-1, n-1)$ -Matrix L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

\*) Beachte: In der Matrix  $\bar{B}_2^T$  dürfen für  $x_n$  und  $y_n$  nicht die gegebenen Koordinaten des Punktes  $P_n$  eingesetzt werden. Dies folgt aus (8.10) und (8.11).

sowie mit dem obigen Vektor  $v_\varphi$  gilt für (8.13) in Matrizen:

$$v_\varphi = L \cdot v_\beta \tag{8.14}$$

(8.14) in (8.12) eingesetzt liefert:

$$B_1^T v_s + \bar{B}_2^T L v_\beta = w \tag{8.15}$$

Wir setzen:

$$B_2^T := \bar{B}_2^T L$$

und erhalten:

$$B_2^T = \begin{bmatrix} -(y_n - y_1) & -(y_n - y_2) & -(y_n - y_{n-1}) \\ (x_n - x_1) & (x_n - x_2) & (x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Durch Hinzunahme der Winkelsummenbedingung (8.5) erhält man die Bedingungsgleichungen in der endgültigen Form:

$v_{s_1}$	$v_{s_1}$	$v_{s_{n-1}}$	$v_{\beta_1}$	$v_{\beta_2}$	$v_{\beta_{n-1}}$	$v_{\beta_n}$		
0	0	0	1	1	1	1	=	
$\cos \varphi_{1,2}$	$\cos \varphi_{2,3}$	$\cos \varphi_{n-1,n}$	$-(y_n - y_1)$	$-(y_n - y_2)$	$-(y_n - y_{n-1})$	0		$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$
$\sin \varphi_{1,2}$	$\sin \varphi_{2,3}$	$\sin \varphi_{n-1,n}$	$(x_n - x_1)$	$(x_n - x_2)$	$(x_n - x_{n-1})$	0		

Man erhält folgendes Normalgleichungssystem:

$$Nk = w \tag{8.16}$$

mit

$$N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \left[ p_{\beta_k}^{-1} \right]_{k=1}^n & \left[ -(y_n - y_k) p_{\beta_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} & \left[ (x_n - x_k) p_{\beta_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} \\ \hline & \left[ \cos^2 \varphi_{k,k+1} p_{s_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} & \left[ \cos \varphi_{k,k+1} \sin \varphi_{k,k+1} p_{s_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} \\ & + \left[ (y_n - y_k) p_{\beta_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} & + \left[ -(y_n - y_k) (x_n - x_k) p_{\beta_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} \\ \hline & & \left[ \sin^2 \varphi_{k,k+1} p_{s_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} \\ & & + \left[ (x_n - x_k)^2 p_{\beta_k}^{-1} \right]_{k=1}^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$k^T = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \quad \text{und} \quad w^T = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]$$

Für die Verbesserungen gilt dann nach der allgemeinen Formel:

$$v = p^{-1} Bk \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned} v_{s_1} &= \frac{1}{p_{s_1}} (\cos \varphi_{1,2} \cdot k_2 + \sin \varphi_{1,2} \cdot k_3) \\ &\vdots \\ v_{s_i} &= \frac{1}{p_{s_i}} (\cos \varphi_{i,i+1} \cdot k_2 + \sin \varphi_{i,i+1} \cdot k_3) \\ &\vdots \\ v_{s_{n-1}} &= \frac{1}{p_{s_{n-1}}} (\cos \varphi_{n-1,n} \cdot k_2 + \sin \varphi_{n-1,n} \cdot k_3) \\ &\vdots \\ v_{\beta_1} &= \frac{1}{p_{\beta_1}} (k_1 - (y_n - y_1) \cdot k_2 + (x_n - x_1) \cdot k_3) \\ &\vdots \\ v_{\beta_i} &= \frac{1}{p_{\beta_i}} (k_1 - (y_n - y_i) \cdot k_2 + (x_n - x_i) \cdot k_3) \\ &\vdots \\ v_{\beta_{n-1}} &= \frac{1}{p_{\beta_{n-1}}} (k_1 - (y_n - y_{n-1}) \cdot k_2 + (x_n - x_{n-1}) \cdot k_3) \\ v_{\beta_n} &= \frac{1}{p_{\beta_n}} \cdot k_1 \end{aligned}$$

## Anhang A: Schematische Zusammenstellung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

**Ausgleichungsprinzip:** Es werden  $u$  Unbekannte  $x$  aus  $n$  Beobachtungen  $l$  bestimmt. Jede Beobachtung wird in einer Fehlergleichung als Funktion der Unbekannten ausgedrückt.

**Vorgehensweise:**

- 1) geg.:  $n$  Beobachtungen  $l$  mit Kovarianzmatrix  $C_{ll}$ .  
 Festlegen von  $m_0$  a priori (mittlerer Gewichtseinheitsfehler vor der Ausgleichung)  
 → Kofaktorenmatrix der Beobachtungen:  $Q_{ll} = \frac{1}{m_0^2} \cdot C_{ll}$   
 → Gewichtsmatrix:  $P = Q_{ll}^{-1} = m_0^2 \cdot C_{ll}^{-1}$
- ges.:  $u$  Unbekannte ( $u < n$ )  
 → Redundanz:  $r = n - u$ .

2) Aufstellen von  $n$  Fehlergleichungen: Jede Beobachtung  $l_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) als Funktion einer oder mehrerer Unbekannten  $x_j$  ( $j = 1, \dots, u$ ).

linear	nicht linear
$l + v = A \cdot x \Rightarrow v = A \cdot x - l$ mit Näherungswerten $x_0$ : $x = x_0 + \Delta x$ $v = A \cdot x_0 + A \cdot \Delta x - l$ $\Rightarrow v = A \cdot \Delta x - \Delta l$ mit $\Delta l = l - A \cdot x_0$	$l + v = f(x) \Rightarrow v = f(x) - l$ mit Näherungswerten $x_0$ : $x = x_0 + \Delta x$ $v = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \cdot \Delta x - l$ (Linearisieren!) $\Rightarrow v = A \cdot \Delta x - \Delta l$ mit $A = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ und $\Delta l = l - f(x_0)$

→ Bereitstellen von Matrix  $A$  und Vektor  $\Delta l$

- 3) Aufstellen und Lösen der Normalgleichungen:  $(A^T P A) \cdot \Delta x = A^T P \Delta l$   
 Berechnen von Normalgleichungsmatrix  $N = A^T P A = Q_{xx}^{-1}$   
 Berechnen von Vektor  $A^T P \Delta l$   
 $\Rightarrow \Delta x = (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P \Delta l$  ( $\Rightarrow x = x_0 + \Delta x$ )

4) Verbesserungen der Beobachtungen  $v = A \cdot \Delta x - \Delta l$

→ Kontrolle  $A^T P v = 0$

→ Schätzung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers nach der Ausgleichung  $m_0$  a posteriori:

$$m_0^2 = \frac{v^T P v}{r} \quad (r = n - u)$$

→ Verbesserte Beobachtungen  $\bar{l} = l + v$  (Berechnung nur, wenn ausdrücklich verlangt.)

5) Kofaktorenmatrizen und Kovarianzmatrizen:

- der Beobachtungen:  $Q_{\parallel} = P^{-1} \quad C_{\parallel} = m_0^2 \cdot Q_{\parallel} \quad (\text{siehe 1})$

- der Unbekannten:  $Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} \quad C_{xx} = m_0^2 \cdot Q_{xx} \quad (\text{siehe 3})$

- der ausgeglichenen Beobachtungen:  $Q_{\bar{\parallel}} = A Q_{xx} A^T$

- der Verbesserungen:  $Q_{vv} = Q_{\parallel} - Q_{\bar{\parallel}}$

6) Weitere Berechnungen, z.B. Modelltest, Redundanzanteile, Suche von groben Fehlern mittels 'data snooping' etc. → Ausgleichungsrechnung II.

## 9 Anhang B: Schematische Zusammenstellung der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen

**Ausgleichungsprinzip:** Es werden die  $n$  ausgeglichenen Beobachtungen  $\bar{l}$  bestimmt. Zwischen den Beobachtung lassen sich  $r$  unabhängige Bedingungsgleichungen aufstellen.

**Vorgehensweise:**

1) geg.:  $n$  Beobachtungen  $l$  mit Kovarianzmatrix  $C_{ll}$ .

Festlegen von  $m_0$  a priori (mittlerer Gewichtseinheitsfehler vor der Ausgleichung)

→ Kofaktorenmatrix der Beobachtungen:  $Q_{ll} = \frac{1}{m_0^2} \cdot C_{ll}$

→ Gewichtsmatrix:  $P = Q_{ll}^{-1} = m_0^2 \cdot C_{ll}^{-1}$

geg.:  $n$  ausgeglichene Beobachtungen  $\bar{l} = l + v$ .

Redundanz:  $r =$  Anzahl aller Beobachtungen – Anzahl der zur Berechnung notwendigen Beobachtungen.

$=$  Anzahl der voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen.

2) Aufstellen von  $r$  Bedingungsgleichungen (Bedingungen zwischen Beobachtungen).

linear	nicht linear
$B^T \cdot (l + v) = s$	$f(l + v) = s$
	Linearisieren: $f(l + dl) = f(l) + \frac{\partial f(l)}{\partial l} \cdot dl$ ,
	mit $v = dl$ und $B^T = \frac{\partial f(l)}{\partial l}$
$\Rightarrow B^T v = s - B^T l = w$	$\Rightarrow B^T v = s - f(l) = w$
Widersprüche $w = s - B^T l$	Widersprüche $w = s - f(l)$

→ Bereitstellen von Matrix  $B^T$  und Vektor  $w$ .

3) Aufstellen und Lösen der Normalgleichungen:  $(B^T P^{-1} B) \cdot k = w$

Berechnen der Normalgleichungsmatrix  $N = B^T P^{-1} B = Q_{ww} = Q_{kk}^{-1}$

$\Rightarrow$  Korrelaten:  $k = (B^T P^{-1} B)^{-1} \cdot w$

4) Verbesserungen der Beobachtungen: **Korrelatengleichungen**  $v = P^{-1} \cdot B \cdot k$

→ Kontrolle  $B^T v = w$ .

→ Schätzung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers nach der Ausgleichung  $m_0$  a posteriori:

$$m_0^2 = \frac{v^T P v}{r}$$

$$\text{Kontrolle: } v^T P v = k^T w.$$

→ Verbesserte Beobachtungen  $\bar{l} = l + v$ .

$$\text{Kontrolle: } f(\bar{l}) = s$$

5) Modelltest ( $m_0$  a posteriori gegen  $m_0$  a priori prüfen → Ausgleichungsrechnung II.)

6) Kofaktorenmatrizen und Kovarianzmatrizen:

- der Beobachtungen:  $Q_{ll} = P^{-1} \quad C_{ll} = m_0^2 \cdot Q_{ll} \quad (\text{siehe 1})$
- der Widersprüche:  $Q_{ww} = B^T P^{-1} B \quad (\text{siehe 3})$
- der Korrelaten:  $Q_{kk} = Q_{ww}^{-1} = (B^T P^{-1} B)^{-1} \quad (\text{siehe 3})$
- der Verbesserungen:  $Q_{vv} = P^{-1} B Q_{kk} B^T P^{-1}$   
 $\Rightarrow$  Redundanzanteile: Diagonalelemente der Matrix  $Q_{vv} P$ .      Kontrolle: Spur ( $Q_{vv} P$ ) = r.
- der ausgeglichenen Beobachtungen:  $Q_{\bar{ll}} = P^{-1} - Q_{vv}$